b) Kurvendiskussionen

Bestimme (mindestens) Nullstellen, Extrema und Wendepunkte und skizziere den Graphen der Funktion $f: x \mapsto y$.

22. $y = \frac{1}{3}(4x^3 - x^4)$ 23. $y = \frac{1}{9}(x^3 - 27x)$ 24. $y = \frac{1}{27}(15x^3 - x^5)$

25. $y = \frac{1}{2}(6x^2 - x^4)$ 26. $y = \frac{1}{3}(x^4 - 8x^3 + 18x^2)$ 27. $y = x^3 - 3x - 2$

28. $y = \frac{1}{3}(x^3 - 12x - 11)$ 29. $y = \frac{1}{25}(x^4 - 32x^2 + 31)$ 30. $y = x^3 - 3x^2 + 4$

31. $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ 32. $y = \frac{1}{5}(x^3 - 3x^2 - 9x + 2)$ 33. $y = x^4 - 4x^2 + 4x - 1$

Bestimme bei den folgenden Funktionen $f: x \mapsto y$, die nicht ganze rationale sind, Nullstellen und Extrema und skizziere ihre Graphen.

34. $y = (x-2)^2 \cdot \operatorname{sgn} x$ 35. $y = (x^2 - 2x - 3) \cdot \operatorname{sgn} x$ 36. $y = x^2 - 2|x|$

37. $y = x \cdot |x - 2|$ 38. $y = \frac{1}{9}|x^3 - 27x|$ 39. $y = \frac{1}{9}(27x - x^3) \cdot \operatorname{sgn} x$

c) Bestimmen der Parabelgleichung

40. Eine Parabel 3.Ordnung hat in P(-1/6) ein Extremum und in Q(1/-10) die Steigung m = -12.

41. Eine Parabel 3.Ordnung hat in A(1/1) ihren Wendepunkt und im Ursprung die Steigung m = -1.

42. Eine Parabel 4.Ordnung hat in P(2/0) die Steigung m = -3. Q(0/4) ist ein Sattelpunkt.

43. Eine Parabel 3.Ordnung schneidet die Parabel p: $y = x^2 - 5x + 4$ in deren Nullstellen und hat im Ursprung die Steigung m = 8.

44. Eine Parabel 4.Ordnung berührt die x-Achse bei x = 1. Der Ursprung ist Wendepunkt. Die Wendetangente hat die Gleichung y = 2x.

45. Eine Parabel 3.Ordnung hat ein Extremum in P(0/3). Die Tangente in Q(2/1) ist parallel zur Geraden g: $4x - y + 3 = 0$.

46. Eine Parabel 3.Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung. Die Tangente im Kurvenpunkt P(3/9) geht auch durch den Ursprung.

47. Eine Parabel 4.Ordnung berührt die x-Achse bei x=2 und hat in P(0/-2) einen Sattelpunkt.

48. Eine Parabel 3.Ordnung schneidet die Gerade g_1: $6x + y - 18 = 0$ auf den Koordinatenachsen und berührt die Gerade g_2: $5x + y - 10 = 0$ bei x = 2.

49. Eine zum Ursprung des Koordinatensystems symmetrische Parabel 3.Ordnung hat in P(2/4) ein Extremum.

50. Eine zur y-Achse symmetrische Parabel 4.Ordnung geht durch P(-1/9) und berührt bei x = 2 die Gerade g: $4x - y - 5 = 0$.

51. P(1/4) ist Wendepunkt einer zur y-Achse symmetrischen Parabel 4.Ordnung. Die Wendetangente in P schneidet die x-Achse bei x = 2.

52. Eine zum Ursprung symmetrische Parabel 5.Ordnung geht durch P(1/3) und berührt die x-Achse bei x= -2.

53. Bei einer Parabel 3.Ordnung schneidet die Tangente im Tiefpunkt T(3/-2) die Parabel bei x = -1. Dort beträgt die Parabelsteigung m = 6.

54. Eine quadratische Parabel schneidet die y-Achse bei y = 8 mit der Steigung m = - 4 und berührt die x-Achse.

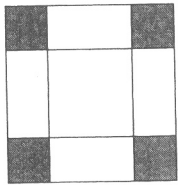
55. Eine Parabel 4.Ordnung hat im Ursprung einen Sattelpunkt und bei x = 1 einen weiteren Wendepunkt. Sie schneidet die x-Achse mit der Steigung m = 4.

56. Der Wendepunkt einer Parabel 3.Ordnung liegt auf der y-Achse. Die Kurvennormale in P(1/0) schneidet die Parabel nochmals in Q(3/4).

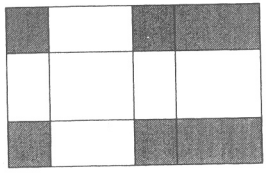
d) Extremalprobleme

57. Zerlege die Zahl 24 so in zwei Summanden, dass
    a) die Summe ihrer Quadrate möglichst klein wird,
    b) das Produkt der Summanden möglichst gross wird.

58. Aus einem quadratischen Karton (Seite 30 cm) soll durch Ausstanzen der schraffierten Quadrate und Zusammenfalten eine Schachtel ohne Deckel mit maximalem Volumen entstehen. Wie hoch wird diese Schachtel?



59. Der Karton ist 40 cm lang und 25 cm breit. Es soll eine Schachtel mit Deckel entstehen. Wie lang sind die Kanten der Schachtel mit maximalem Inhalt?



60. Das Kantenmodell eines Quaders, der dreimal so lang wie breit ist, wird aus 520 cm Draht hergestellt. Wie sind die Kanten zu wählen, wenn die Oberfläche des Quaders möglichst gross sein soll ?

61. Ein Kreissektor von gegebenem Umfang u soll maximalen Flächeninhalt haben. Bestimme den Radius und den Zentriwinkel des Sektors.

62. Die Zahlen a und b erfüllen die Bedingung $a + b^2 = 13$.
a) Welches ist der kleinste Wert, den $a^2 + b^3$ annehmen kann ?
b) Wie viel beträgt dieser kleinste Wert, falls a und b positiv sind ?

63. Wie hoch ist der gerade Kreiskegel mit gegebener Mantellinie s, der grösstmögliches Volumen besitzt ?

64. Einem geraden Kreiskegel (Grundkreisradius 3 cm, Höhe 6 cm) ist der Kreiszylinder mit maximalem Volumen einzubeschreiben, der die gleiche Rotationsachse wie der Kegel hat. Bestimme die Zylinderhöhe.

65. Welcher Punkt auf der Parabel p: $y = 0.5x^2$ hat den kürzesten Abstand vom Punkt P(6/0) ?

66a) Skizziere die Parabel p: $y = 5x - x^2$.
b) Der Punkt A(a/b) liegt im 1.Quadranten auf der Parabel p. Bestimme die Koordinaten von A so, dass das Rechteck, von dem zwei Seiten auf den Koordinatenachsen liegen und von dem A eine Ecke ist, möglichst grossen Umfang hat.

67. Löse das gleiche Problem für die Parabel p: $y = 3x - x^2$; diesmal soll das Rechteck maximalen Flächeninhalt haben.

68. Einem spitzwinkligen Dreieck (Grundseite a, Höhe h) soll das flächengrösste Rechteck einbeschrieben werden, dessen eine Seite auf a liegt.

69. Aus einem rechteckigen Stück Blech von 60 cm Breite wird eine Rinne mit trapezförmigen Querschnitt hergestellt. Die beiden Ränder der Rinne bilden mit dem Boden je einen Winkel von 120°. Der Querschnitt der Rinne soll maximalen Flächeninhalt haben. Wie breit wird der Boden ?

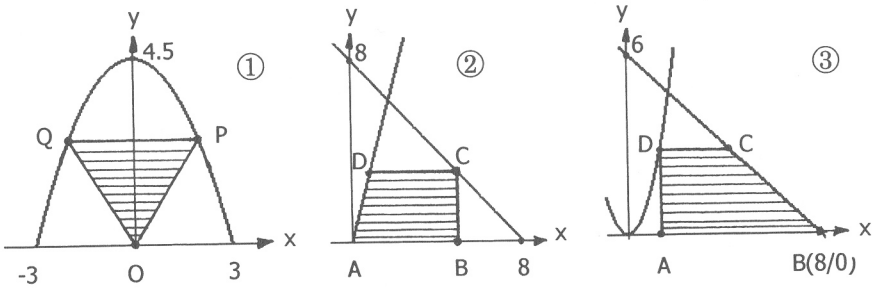
70. Der Kugel mit dem Radius 5 dm soll der volumengrösste gerade Kreiszylinder einbeschrieben werden. Wie hoch ist dieser ?

71a) Zeichne die Parabel p: $y = \frac{1}{5}(x^4 - 10x^2 + 25)$.
b) Dem endlichen Flächenstück, das von der x-Achse und von der Parabel p begrenzt wird, ist dasjenige Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einzubeschreiben, von dem eine Seite auf der x-Achse liegt. Berechne den Flächeninhalt dieses Rechtecks.

72. Dem Flächenstück, das die Parabel p: $y = a - x^2$ $(a > 0)$ mit der x-Achse einschliesst, ist ein Rechteck so einzubeschreiben, dass es bei Rotation
a) um die y-Achse den Zylinder mit maximalem Volumen erzeugt;
b) um die x-Achse den Zylinder mit maximalem Volumen erzeugt.
Berechne die Seitenlängen dieses Rechtecks.

73. Aus 80 cm Draht wird das Kantenmodell einer geraden quadratischen Pyramide mit maximalem Volumen hergestellt.
Wie lang sind die Grundkanten ?

74. Ein Körper besteht aus einem geraden Kreiszylinder mit einem aufgesetzten geraden Kreiskegel mit gleichem Grundkreisradius. Die Zylinderhöhe beträgt 3 dm, die Mantellinie des Kegels 9 dm. Das Volumen des Körpers soll maximal sein. Wie hoch wird dieser Körper sein ?



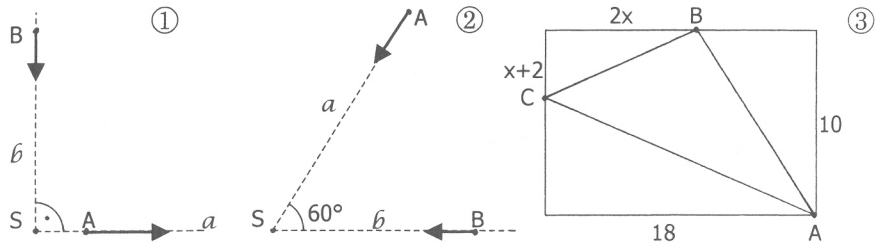
75. ①: Diesem quadratischen Parabelsegment ist das gleichschenklige Dreieck mit der Basis $\overline{PQ}$ und grösstem Flächeninhalt einzubeschreiben. Bestimme den Flächeninhalt und die Winkel des Dreiecks.

76. ②: Die Geraden g_1 und g_2: $y = 3.5x$ sind gegeben. Das Viereck ABCD ist ein rechtwinkliges Trapez mit maximalem Flächeninhalt.
Gesucht sind die Koordinaten von C und D sowie der Flächeninhalt.

77. ③ zeigt eine Variante von Aufgabe 76: Die Gerade g und die Parabel p: $y = 3x^2$ sind gegeben. Die Fragestellung entspricht der Aufgabe 76.

78. Der Halbkugel mit dem Radius r = 1 wird ein schiefer Kreiskegel einbeschrieben, von dem eine Mantellinie auf dem Grundkreis der Halbkugel liegt. Das Volumen des Kegels soll maximal sein. Gib es in Prozenten des Volumens der Halbkugel an.

79. Der Punkt P liegt auf einem Kreis mit dem Radius r = 4 und dem Mittelpunkt M(4/0). Die Parallelen durch P zu den Koordinatenachsen begrenzen mit diesen ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt.
Welche Koordinaten hat P ?



80. ①: Die Punkte A und B bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit auf den Geraden a und b. Zum Zeitpunkt 0 gilt: $\overline{SA} = 10$ cm, $\overline{SB} = 60$ cm. Die Geschwindigkeit von A ist 4 cm/s, die von B 2 cm/s. Nach welcher Zeit ist die Entfernung $\overline{AB}$ am kleinsten?

81. ②: Gleiche Fragestellung. Zum Zeitpunkt 0 gilt: $\overline{SA} = 80$ cm, $\overline{SB} = 60$ cm, Geschwindigkeit von A 7 cm/s, von B 2 cm/s.

82. ③: Das gegebene Rechteck hat Seiten der Länge 10 und 18 Einheiten. Bestimme x so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC möglichst gross wird.

83. Die Parabel p: $y = x^2 + 3$ und die Gerade g: $x = 5$ sind gegeben. Der Punkt P(u/v) liegt auf p im 1.Quadranten links von g. Durch P werden die Parallelen a und b zu den Koordinatenachsen gezeichnet. Die x-Achse, a, b und g begrenzen ein Rechteck. Wie ist P zu wählen, damit
   a) das Rechteck maximalen Flächeninhalt hat,
   b) das Rechteck minimalen Flächeninhalt hat
      I. für $u < 2$, II. für alle erlaubten Werte von u?
   c) Skizziere die Flächeninhaltsfunktion A(u) für $0 \leqq u \leqq 5$.

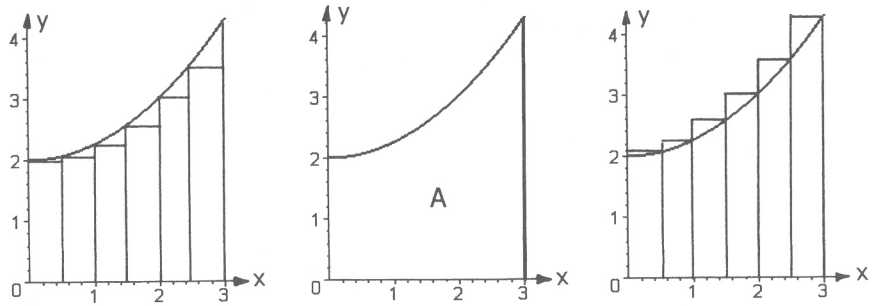
84. Einem geraden Kreiskegel ($r = 1$, $h = 3$) ist ein zweiter Kreiskegel mit extremaler Mantelfläche M so einzubeschreiben, dass dessen Spitze im Mittelpunkt des Grundkreises des gegebenen Kegels liegt.
   a) Welcher Kegel hat maximale, welcher minimale Mantelfläche?
   b) Skizziere die Mantelflächenfunktion $M^2(r)$ für $0 \leqq r \leqq 1$.

Zum Abschluss folgt noch eine Maturaufgabe.

85. Die Parabel p: $y = -0.1(x^2 + 10x - 39)$ und das Trapez ABCD sind gegeben. A ist der Koordinatenursprung, B die positive Nullstelle der Parabel; C ist ein beliebiger Parabelpunkt im 1.Quadranten, D der zugehörige Punkt auf der y-Achse.
   a) Wie gross kann der Winkel $\measuredangle$ ABC unter diesen Bedingungen sein?
   b) Bestimme C so, dass das Trapez ABCD maximalen Flächeninhalt hat.

4. INTEGRALRECHNUNG I

a) Das bestimmte Integral



Untersumme U_6 Obersumme O_6

1. Der Graph der Funktion f: $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ ist im Intervall [0, 3] dargestellt.
   Das Intervall wird in 6 gleiche Teilintervalle zerlegt.
   a) Berechne die Summe der Flächeninhalte der 6 Rechtecke U_6.
   b) Berechne die Summe der Flächeninhalte der 6 Rechtecke O_6.
   c) Welche Aussage lässt sich über den Inhalt der Fläche A machen?

2. Allgemeiner: Bilde die Obersumme O_n im Intervall [0, b] für die gleiche Funktion f (n gleiche Teilintervalle der Breite h).
   a) Drücke O_n durch b und n aus (Tipp: Aufgabe 64, Seite 7).
   b) Berechne den Flächeninhalt $A = \lim\limits_{n\to\infty} O_n$.

3a) $\int_0^2 3x^2dx$ b) $\int_1^3 x^3dx$ c) $\int_2^4 (x^2+3)dx$ d) $\int_1^3 (x^2-4x)dx$

4a) $\int_{-3}^{-2} (x^3+6x)dx$ b) $\int_{-2}^{1} (x^4-5)dx$ c) $\int_1^4 x^5(2x+5)dx$ d) $\int_{-2}^{2} (2x-3)^2dx$

5. Ermittle k für a) $\int_1^3 (1.5x^2+3x+k)\,dx = 17$, b) $\int_{-1}^{0} (3x^2-kx+k)\,dx = -2$.

b) Berechnung von Flächeninhalten

6. Berechne den Inhalt der vom Graphen der Funktion f: $x \mapsto y$ und der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücke.
   a) $y = x^2-5x+4$ b) $y = x^3-2x^2-3x$ c) $y = x^4-10x^2+9$ d) $y = x^3-3x^2+4$

7. Die Parabel p: $y = 3x - x^2$ besitzt die Nullstellen A und B. Zeige, dass die Parabel das im 1. Quadranten liegende Quadrat mit der Seite $\overline{AB}$ halbiert.

40. Für welchen positiven Wert von a schneidet die Gerade g: $y = ax$ die Kurve f: $y = \sqrt{2 - ax}$ unter einem rechten Winkel ?

41. Dasselbe für die Kurven f_1: $y = \sqrt{ax}$ und f_2: $y = \sqrt{x - a}$.

42. Bestimme a, b und c, wenn die Kurve f: $y = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2}$ in P(-1/-2) die Steigung m = - 1 hat und die x-Achse bei x = 1 schneidet.

43. $y = \dfrac{6x^{\oplus} - \Theta x + 1}{\wp x - \hbar}$ heisst die schlecht lesbare Gleichung einer Kurve, deren Asymptoten die Gleichungen x = 4 und $y = 3x^2 + 12x$ besitzen. Wie heisst die vollständige Kurvengleichung ?

d) Kurvendiskussionen

Diskutiere die gegebene Funktion f: $x \mapsto y$ und zeichne ihren Graphen. Trigonometrische Funktionen sind im Intervall $[0, 2\pi]$ zu untersuchen.

44. $y = \dfrac{8x - 16}{x^2}$
45. $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$
46. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2}$
47. $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 9}$
48. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$
49. $y = \dfrac{x^2 - 36}{x - 5}$
50. $y = \sqrt{x^3 + 64}$
51. $y = x\sqrt{6 - x}$
52. $y = (x^2 - 5)\sqrt{x}$
53. $y = \sin x + \cos x$
54. $y = \sin^2 x$
55. $y = \cos^3 x$
56. $y = \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3}$
57. $y = \dfrac{x^2 + 12}{x^2 + 3}$
58. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3}$
59. $y = \dfrac{x^4 + 16}{4x^2}$
60. $y = \dfrac{16x}{x^2 + 4}$
61. $y = \dfrac{(x - 2)^2}{2x}$
62. $y = \sqrt{4x - x^3}$
63. $y = x^2\sqrt{4 - x^2}$
64. $y = \sin x \cdot (1 + \sin x)$
65. $y = 2\sin x + \cos 2x$
66. $y = x - 3x^{-1} + 2x^{-2}$
67. $y = x^2 - 2x^{-1} + 1$
68. $y = \frac{1}{4}(x - 5)^2\sqrt{x}$
69. $y = x + \sqrt{8 - 2x}$
70. $y = 18 \cdot \dfrac{x + 1}{(x + 2)^2}$
71. $y = \dfrac{x^4 + 3}{x}$
72. $y = \sin x + \sin 2x$
73. $y = \tan x + 2\sin x$
74. $y = 2\sin 2x - \tan x$
75. $y = \dfrac{48x^2}{(x^2 + 4)^2}$
76. $y = \dfrac{x^3}{3(x - 3)^2}$

77. $y = x - \sqrt{4 - x^2}$
78. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x - 1}}$
79. $y = \dfrac{6 - x}{\sqrt{9 - x^2}}$

e) Extremalprobleme

80. Gesucht ist der Wert der positiven Zahlen a und b sowie der Summe S.
    a) Es gilt: $a \cdot b = 25$; $S = a + b$ soll möglichst klein sein.
    b) Es gilt: $a - b^2 = 20$; $S = a + \dfrac{1}{b^2}$ soll möglichst klein sein.
    c) Es gilt: $a \cdot b^2 = 16$; $S = a^2 + b$ soll möglichst klein sein.

81. Für welche positive Zahl gilt, dass die Summe aus Zahl und Reziprokwert der Zahl minimal ist ?

82. Ein rechtwinkliges Dreieck mit gegebener Hypotenuse c soll
    a) maximalen Umfang haben, b) maximalen Flächeninhalt haben.
    Wie gross sind seine spitzen Winkel ?

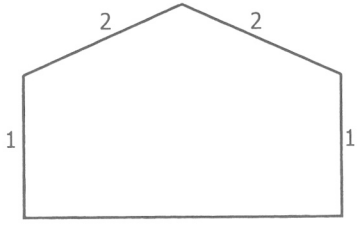
83. Wie lang sind die Seiten beim Rechteck mit dem grössten Flächeninhalt, dessen Diagonalen je 8 cm lang sind ?

84. Dem Viertelskreis mit dem Radius 2 cm ist das Rechteck mit maximalem Umfang einzubeschreiben. Bestimme seinen Flächeninhalt.

85. Ein gleichschenkliges Dreieck besitzt den gegebenen Flächeninhalt A. Die Summe von Basis und Basishöhe soll minimal sein. Wie gross ist in diesem Fall der Winkel an der Spitze ?

86. Ein Kreissektor besitzt den Flächeninhalt $A = 25\,cm^2$. Sein Umfang soll minimal werden. Berechne Radius, Bogenlänge und Zentriwinkel dieses Sektors.

87. Einem Rechteck wird ein gleichschenkliges Dreieck aufgesetzt (siehe rechts). Wie breit muss das Rechteck sein, damit der Flächeninhalt der ganzen Figur maximal wird ?



88. Welches von allen gleichschenkligen Dreiecken mit dem Umfang 24 cm hat den grössten Flächeninhalt ?

89. Einer Halbkugel vom Radius 6 cm ist der Zylinder mit maximaler Mantelfläche einzubeschreiben. Wie hoch ist dieser Zylinder ?

90. Ein Quader mit dem Volumen $V = 25\,cm^3$ und der einen Kante a = 4 cm soll eine minimale Oberfläche haben. Wie lang sind die anderen Kanten ?

91. Bestimme Radius und Höhe eines geraden Kreiszylinders, der bei gegebenem Volumen $V = 1\ dm^3$ minimale Oberfläche besitzen soll.

92. Ein Paket mit quadratischer Grundfläche hat einen Inhalt von $4\ dm^3$. Wie sind seine Masse zu wählen, damit möglichst wenig Schnur zum Umwickeln benötigt wird? Die quadratischen Flächen werden dabei kreuzweise, die andern einfach umwickelt.

93. Einem Halbkreis mit dem Radius $r = 8$ cm soll das Trapez mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Wie lang sind seine Seiten?

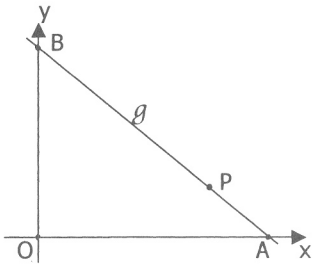
94. Einem geraden Kreiszylinder (Radius 8 cm, Höhe 3 cm) soll ein gerader Kreiskegel so umbeschrieben werden, dass beide Grundflächen in der gleichen Ebene liegen. Der Kegel soll minimales Volumen haben.

95. Aus *zwei* Brettern der Breite b ist die Wasserrinne mit dem grösstmöglichen Fassungsvermögen herzustellen.
Wie gross ist der Winkel zwischen den Brettern?

96. Gleiche Aufgabe wie 106, jedoch mit *drei* Brettern.

97. Gleiche Aufgabe mit *vier* Brettern; die beiden äusseren sollen senkrechte Wände bilden.

98. Der Punkt P(8/1) liegt auf der Geraden g.
Welche Steigung hat die Gerade g bei
a) minimalem Flächeninhalt des Dreiecks OAB,
b) möglichst kurzer Strecke $\overline{AB}$?



99. Einem Rechteck mit den Seiten $a = 6$ cm und $b = 4$ cm ist das flächenkleinste gleichschenklige Dreieck so umzubeschreiben, dass die Seite a auf der Basis des Dreiecks liegt.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

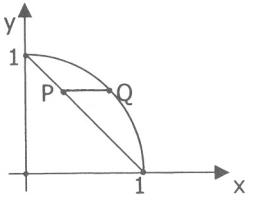
100. Der innere Querschnitt eines Strassentunnels ist ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis und dem Flächeninhalt $50\ m^2$. Der Querschnitt soll minimalen Umfang haben. Wie breit ist dieser Tunnel?

101. Für welche Punkte auf der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ ist der Abstand zum Ursprung minimal?

102. Löse das gleiche Problem für f: $y = 2x^{-2}$.

103. Die Funktion f: $y = \frac{32}{x^2 + 2x + 13}$ ist gegeben.
In welchem Punkt des Funktionsgraphen ist die Tangentensteigung
a) maximal, b) minimal?

104. Die Strecke $\overline{PQ}$, die parallel zur x-Achse verläuft, soll möglichst lang werden.
Welche Koordinaten hat in diesem Fall der Punkt Q auf dem Kreisbogen?

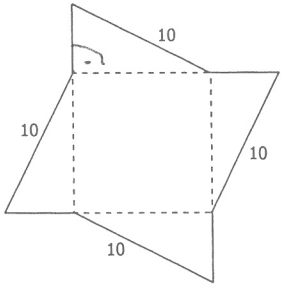


105. Man wirft einen Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α gegenüber der Horizontalen.
Für die horizontale Wurfweite W gilt: $W = \frac{2(v_0)^2}{g} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$;
g ist die Erdbeschleunigung.
Für welchen Winkel α wird die Wurfweite W am grössten?

106. Ein zylindrischer Behälter ohne Deckel fasst 1000 Liter. Das Material für die Wand kostet 180 Fr. pro m^2, dasjenige für den Boden 60 Fr. pro m^2. Man bestellt einen Behälter von 1 m Höhe.
a) Wie viel kostet dieser Behälter?
b) Wie viel Geld hätte man sparen können, wenn man den Behälter mit den geringsten Materialkosten bestellt hätte?

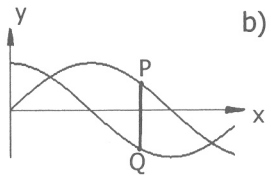
107. Die Parabel p: $y = \frac{1}{a-3}(ax - x^3)$ mit $a > 3$ ist gegeben.
a) Skizziere die Parabel und berechne den Inhalt der Fläche zwischen Parabel und x-Achse im 1. Quadranten.
b) Für welchen Wert von a wird der Flächeninhalt minimal?

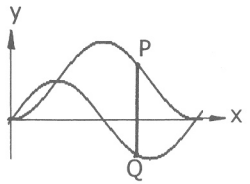
108. Der Flächeninhalt der Figur rechts soll möglichst gross sein.
Berechne für diesen Fall
a) die Seitenlänge des Mittenquadrats,
b) den Flächeninhalt der Figur.



109. Einem Zylinder mit gegebener Höhe a wird ein gerader Kegel mit gleichem Grundkreisradius und mit der Mantellinie a aufgesetzt.
Der gesamte Körper soll maximales Volumen haben.
Wie gross ist in diesem Fall der Öffnungswinkel des Kegels?

110. Dem Kreis mit dem Radius r = 1 wird ein Rhombus umbeschrieben. ε sei ein halber spitzer Rhombenwinkel.
   a) Drücke den Flächeninhalt des Rhombus durch ε aus.
   b) Wie gross ist ε im flächenkleinsten Rhombus?

111a) 

b) 

Graphen links:
a) f_1: $y = \sin x$,
f_2: $y = \cos x$
b) f_1: $y = \sin x$,
f_2: $y = 1 - \cos x$

Die Strecke $\overline{PQ}$, die parallel zur y - Achse verläuft, soll möglichst lang sein. Welche Koordinaten hat P, und wie lang ist $\overline{PQ}$?

112a) Diskutiere die Funktion f: $y = \dfrac{48}{x^2+12}$.
   b) Das Rechteck ABCD mit der Seite $\overline{AB}$ auf der x-Achse und den Ecken C und D auf dem Graphen von f soll maximalen Flächeninhalt haben. Ermittle die Koordinaten von C und D.

113. Im Punkte P(u > 0/v) der Parabel p: $y = 3 - x^2$ ist die Tangente an die Parabel zu legen.
   a) Welche Koordinaten hat P, wenn das von der Tangente und von den Koordinatenachsen begrenzte Dreieck minimalen Flächeninhalt hat?
   b) Berechne diesen Flächeninhalt.

114. Für welchen Wert von a hat die von den Graphen der Funktionen f_1: $y = ax^2 - x$ und f_2: $y = ax$ eingeschlossene Fläche minimalen Inhalt?

115a) Bestimme Definitionsmenge, Nullstellen und Extremum der Funktion f: $y = x(3 - \sqrt{x})$. Zeichne den Graphen von f im Intervall [0, 10].
   b) Der Fläche zwischen Kurve und x-Achse wird ein rechtwinkliges Dreieck OPQ mit der Hypotenuse $\overline{OQ}$ einbeschrieben (O Ursprung, P auf der x-Achse, Q auf der Kurve). Das Dreieck OPQ hat maximalen Flächeninhalt. Welche Koordinaten hat der Punkt Q?

116. Ein 10 m hoher Raum mit einem quadratischen Grundriss von 4 m Seitenlänge besitzt eine 2 m hohe Tür, aber keine Fenster. Vor der Türe hat es keine Treppe, liegt ein ebener Platz. Wie lang ist die längste Leiter, die man durch die Türe in den Raum schieben kann?

117. Eine Teetasse in Form einer Kugelkappe fasst 2 dl. Die innere Benetzungsfläche soll minimal sein. Berechne Kugelradius und Kappenhöhe.

118. Einer Kugel vom Radius r = 1 soll der gerade Kreiskegel mit minimalem Volumen umbeschrieben werden. Wie hoch ist dieser Kegel?

Zum Abschluss folgen noch einige Maturaufgaben.

119a) Diskutiere die Funktion f: $y = \dfrac{x^3}{x^2+12}$; zeichne ihren Graphen.
   b) Welchen Abstand hat der Kurvenpunkt $P(\sqrt{2}/y_P)$ von der Asymptote?
   c) Welcher Kurvenpunkt hat den grössten Abstand von der Asymptote?

120. Gegeben ist ein Kreis mit dem Durchmesser $\overline{PQ}$ = 8 cm. Die Ecken A und B eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC liegen auf dem Kreis; dabei ist die Basis $\overline{AB}$ parallel zu $\overline{PQ}$. Die Spitze des Dreiecks soll vom Kreismittelpunkt M möglichst weit entfernt sein.
   a) Wie lang ist die Basis $\overline{AB}$?
   b) Wie gross ist der Winkel $\measuredangle$ MPB?

121. Die Funktion f: $y = a \cdot \sin 2x + b \cdot \cos x$ ist gegeben.
   a) Bestimme a und b so, dass der Graph der Funktion in $P(\frac{\pi}{6}/\sqrt{3})$ die Steigung m = 5 besitzt.
   b) Berechne die Koordinaten der Nullstellen und Extrema im Intervall $[0, 2\pi]$; skizziere den Graphen der Funktion f in diesem Intervall.

122a) Diskutiere die Kurve mit der Gleichung $y = \dfrac{x^2+1}{x^2}$.
   b) Im Kurvenpunkt P(u/v), der im 1.Quadranten liegt, wird die Tangente t an die Kurve gelegt. Die Tangente t schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten Q und R. Bestimme den Punkt P so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OQR minimal wird (O: Ursprung).
   c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks PQR.

123. Der Graph der Funktion f: $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$ schneidet die x-Achse in x=2 und x= -2 und hat die Asymptote g: $y = -1$.
   a) Bestimme a, b und c und führe dann eine Kurvendiskussion durch.
   b) Die Tangenten in den Nullstellen bilden mit der x-Achse ein Dreieck; berechne seinen Flächeninhalt.
   c) Zwei Ecken eines Rechtecks liegen auf der Asymptote g und zwei weitere auf dem Graphen von f. Das Rechteck soll maximalen Flächeninhalt haben. Bestimme diesen Flächeninhalt.

124. Die Funktion f: $y = \frac{1}{4}x^2\sqrt{5-x}$ und der Punkt P(-84/0) sind gegeben.

a) Bestimme Definitionsmenge, Nullstellen und Extrema; zeichne den Graphen der Funktion.

b) Zeige, dass der Kurvenpunkt, der am nächsten bei P liegt, der Punkt Q(-4/12) ist.

c) Der Kreis mit der Strecke zwischen den beiden Nullstellen als Durchmesser hat mit dem Graphen von f einen weiteren Punkt gemeinsam. Welche Koordinaten hat dieser Punkt?

125a) Zeichne die Kurve f: $y = \frac{8}{x^2}$ im Intervall $[-4, +4]$.

b) Im Kurvenpunkt $P(u > 0/v)$ wird die Tangente t an die Kurve gelegt. t schneidet die Kurve im 2. Quadranten im Punkt Q. Gesucht sind die Gleichung von t und die Koordinaten von Q.

c) Der Tangentenabschnitt $\overline{PQ}$ soll möglichst kurz sein. Berechne für diesen Fall die Koordinaten von P und Q sowie die Länge von $\overline{PQ}$.

126. Die Funktion f: $y = 2\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$ ist gegeben.

a) Gesucht sind im Intervall $[0, 2\pi]$ die Nullstellen, Extrema, Wendepunkte. Zeichne den Graphen in diesem Intervall.

b) Eine quadratische Parabel p geht durch die beiden Extrema und hat eine Nullstelle bei $x = \pi$. Bestimme die Gleichung von p. Zeichne die Parabel im gleichen Koordinatensystem wie den Graphen von f.

c) Wie gross ist der Schnittwinkel der beiden Kurven im Hochpunkt des Graphen von f?

127a) Ermittle von der Funktion f: $y = \frac{4-x^2}{x^2}$ Nullstellen, Extrema, Asymptoten, zeichne den Graphen.

b) Eine Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen in $P_{1,2}(\pm a/b)$. Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten $t_{1,2}$ in $P_{1,2}$.

c) Die Tangenten $t_{1,2}$ schneiden sich im Punkt C und die Asymptote für $x \to \pm\infty$ in den Punkten A und B. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABC (in Abhängigkeit von a)?

d) Für welchen Wert von a beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABC I. 1000, II. 0.001?

e) Welche Werte kann der Flächeninhalt des Dreiecks ABC annehmen?

6. INTEGRALRECHNUNG II

a) Das unbestimmte Integral

Ermittle in den folgenden Gleichungen f(x).

1a) $\int f(x)\,dx = x^3 + C$ b) $\int f(x)\,dx = 3x^5 - x + C$

c) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + 4x^2 + C$ d) $\int f(x)\,dx = x^3(2x-5) + C$

2a) $\int f(x)\,dx = \frac{1}{x} + C$ b) $\int f(x)\,dx = 4x^{-3} + C$

c) $\int f(x)\,dx = 5x^{-2} + 2x^{-5} + C$ d) $\int f(x)\,dx = x^2\left(\frac{1}{x^8} - \frac{x^4}{4}\right) + C$

3a) $\int f(x)\,dx = \sqrt{x} + C$ b) $\int f(x)\,dx = 2\sqrt{x^3} + C$

c) $\int f(x)\,dx = x + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + C$ d) $\int f(x)\,dx = (x^2-1)(\sqrt{x}+1) + C$

4a) $\int f(x)\,dx = 3\sin x + C$ b) $\int f(x)\,dx = 2\cos^2 x + C$

c) $\int f(x)\,dx = \tan x + C$ d) $\int f(x)\,dx = x + \sin x \cdot \cos x + C$

Bestimme in den folgenden Aufgaben das unbestimmte Integral.

5a) $\int 7\,dx$ b) $\int 3x\,dx$ c) $\int (4x-5)\,dx$

d) $\int x(3x-8)\,dx$ e) $\int \cos x\,dx$ f) $\int \sin x\,dx$

6a) $\int x^{-2}\,dx$ b) $\int 3x^{-4}\,dx$ c) $\int (2x^{-3} - 4x^3)\,dx$

d) $\int (4u^{-5} - 5u^{-4} + 2)\,du$ e) $\int \frac{1}{x^7}\,dx$ f) $\int \left(\frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3} + \frac{10}{x^4}\right)dx$

7a) $\int \sqrt{x}\,dx$ b) $\int x^2\sqrt{x}\,dx$ c) $\int (x-2)\sqrt{x}\,dx$

8. Zeige, dass gilt: a) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + C$

b) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x) + C$

9. Der Graph der Funktion f: $y = f(x)$ berührt bei $x = 2$ die x-Achse. Bestimme die Gleichung der Funktion, deren 2. Ableitung $f''(x)$ gegeben ist.

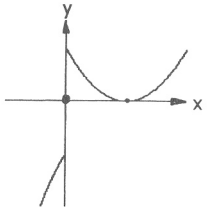
a) $f''(x) = 3x - 3$ b) $f''(x) = 2x^{-3}$ c) $f''(x) = 12x^{-4} - 3x^{-3}$

*Bei den folgenden Kurvendiskussionen bedeutet **N** Nullstelle, **H** Hochpunkt, **T** Tief-punkt, **W** Wendepunkt, **S** Sattelpunkt. Die Koordinaten sind auf Hundertstel gerundet.*

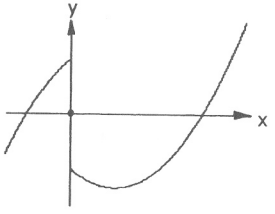
20

22. N(4/0), H(3/9), S(0/0), W(2/5.33)
23. N(±5.20/0), T(3/ -6), H(-3/6), W(0/0)
24. N(±3.87/0), H(3/6), T(-3/ -6), S(0/0), W(±2.12/±3.71)
25. N(±2.45/0), H(±1.73/4.5), T(0/0), W(±1/2.5)
26. T(0/0), S(3/9), W(1/3.67)
27. N(2/0), H(-1/0), T(1/ -4), W(0/ -2)
28. N(-1/0), N(3.85/0), N(-2.85/0), H(-2/1.67), T(2/ -9), W(0/ -3.67)
29. N(±1/0), N(±5.57/0), H(0/1.24), T(±4/ -9), W(±2.31/ -4.45)
30. N(-1/0), T(2/0), H(0/4), W(1/2)
31. N(3/0), H(1/0), T(2.33/ -1.19), W(1.67/ -0.59)
32. N(-2/0), N(4.79/0), N(0.21/0), T(3/ -5), H(-1/1.4), W(1/ -1.8)
33. N(0.41/0), N(-2.41/0), T(1/0), H(0.62/0.09), T(-1.62/ -11.09), W(0.82/0.04), W(-0.82/ -6.49)

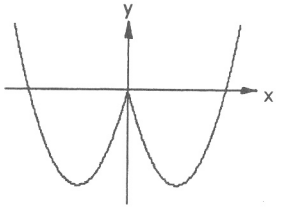
34. T(2/0)



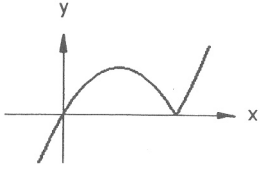
35. N(-1/0), N(3/0), T(1/-4)



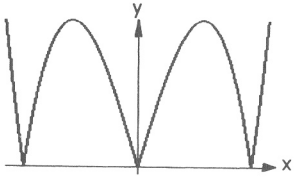
36. N(±1/0), N(0/0), T(±1/-1)



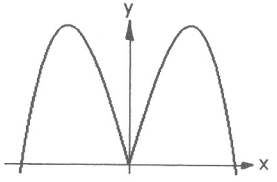
37. N(0/0), N(2/0), H(1/1)



38. N(±5.2/0), N(0/0), H(±3/6)



39. N(±5.2/0), N(0/0), H(±3/6)



40. $y=x^3 - 3x^2 - 9x+1$ **41.** $y= - x^3+3x^2 - x$ **42.** $y= \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{4}x^3+ 4$

43. $y=2 x^3 -10x^2+8x$ **44.** $y=4x^4 - 6 x^3+2x$ **45.** $y= \frac{3}{2} x^3 - \frac{7}{2}x^2 +3$

46. $y= - \frac{1}{3}x^3+2 x^2$ **47.** $y= - \frac{3}{8}x^4 + x^3 - 2$ **48.** $y= x^3 - 2 x^2 - 9x+18$

21

49. $y= - \frac{1}{4}x^3+3x$ **50.** $y=x^4 - 7 x^2+15$ **51.** $y= \frac{1}{2}(x^4 - 6 x^2+13)$

52. $y= \frac{1}{3}(x^5 - 8 x^3+16x)$ **53.** $y= x^3- 5x^2+3x+7$ **54.** $y=\frac{1}{2}x^2 - 4x+8$

55. $y= \frac{1}{2} x^4 - x^3$ **56.** $y= {}^1/_4 (x^3 - 5x+4)$ **57a)** 12 **b)** 12

58. 5 cm **59.** 15 cm, 15 cm, 5 cm **60.** 20 cm, 50 cm, 60 cm

61. $r = \frac{u}{4}$; 114.59° **62.** -55 für a = -3 , b = -4; 40.27 für a =2.4375, b =3.25

63. $h= \frac{s\sqrt{3}}{3}$ **64.** h=2 cm **65.** Q(2/2) **66b)** A(3/6)

22

67b) A(2/2) **68.** Seiten $\frac{a}{2}, \frac{h}{2}$ **69.** 20 cm **70.** 5.77 dm

71a) T(±2.24 /0), H(0/5) **b)** P(±1/3.2); A=6.4

72a) $2\sqrt{\frac{a}{2}}$ und $\frac{a}{2}$ **b)** $2\sqrt{\frac{a}{5}}$ und $\frac{4a}{5}$ **73.** 9.3 cm

23

74. h=6 dm **75.** $A=3\sqrt{3}$; je 60°

76. g_1 : y = -x+8; C(4.5/3.5), D(1/3.5), Flächeninhalt A = 14

77. g : $y = -\frac{3}{4}x+6$; C(1.86/4.61, D(1.24/4.61), Flächeninhalt A ≈ 17.00

78. 38.5 % **79.** $P(6/\pm 2\sqrt{3})$

80. Nach 4 Sekunden **81.** Nach 10 Sekunden

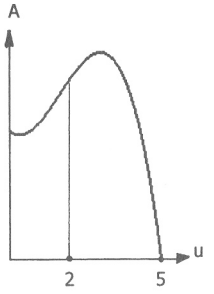
24

82. Maximum x = 8.5 unmöglich, da $8.5 \notin D_x = [0, 8]$
Maximum A = 90 im Randwert x = 8

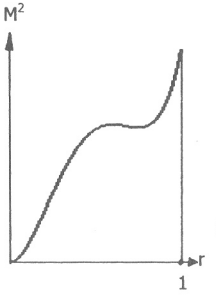
83aI) P(2/7): A_{max}=21 **aII)** P(3/12): A_{max}=24 **bI)** $P(\frac{1}{3}/ \frac{28}{9})$: $A_{min}= \frac{392}{27} \approx 14.51$

bII) P→ (5/28): $A_{min} \to 0$ **c)** $A(u)=15 - 3u+5u^2 - u^3$; Graph: siehe unten.

Graph zu 83c)



Graph zu 84b)



84a) Die Randwerte sind die absoluten Extremalwerte : Für r=s=1 und h=0 ist $M_{max}=\pi$; für r= 0 und h = s = 3 ist M_{min}= 0. Die Randwerte selbst erzeugen zwar keinen Kreiskegel, aber für „h fast 0" oder „r fast 0" gibt es Kreiskegel. Ein relatives Maximum gibt es für r = 0.6 und h = 1.2, ein relatives Minimum für r = h = 0.75.
b) $M^2(r)=\pi^2 (10 r^4 - 18 r^3+9 r^2)$; Graph: siehe links.

85a) $\beta_{min} \approx 52.43°$; $\beta_{max} \approx 58.00°$ (exakt: $1.3 < \tan \beta < 1.6$) **b)** $C(\frac{1}{3}/ \frac{32}{9})$

4. INTEGRALRECHNUNG I

1a) 7.71875 **b)** 8.84375 **c)** $U_6 < A < O_6$ (genauer Wert: A = 8.25) **25**

2a) $O_n = \frac{1}{24} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \cdot b^3 +2b$ $(U_n = \frac{1}{24} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \cdot b^3 +2b)$ **b)** $A = \frac{1}{12} b^3 +2b$

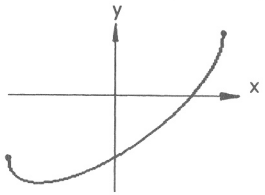
3a) 8 **b)** 20 **c)** $24.\overline{6}$ **d)** $-7.\overline{3}$ **4a)** -31.25 **b)** -8.4 **c)** 8093.36 **d)** $57.\overline{3}$

5a) k = -4 **b)** k = -2 **6a)** 4.5 **b)** $11.8\overline{3}$ **c)** $52.2\overline{6}$ **d)** 6.75

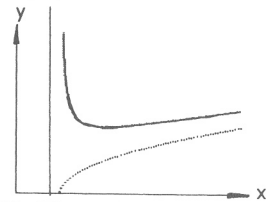
7. Flächeninhalt 4.5 **8.** a = 6 **9a)** $y = x^3 - x^2$ **b)** $A = \frac{1}{12}$ **26**

78. $D = (1, +\infty)$; T(2/2), W(4/2.31); Asymptoten: $x = 1$, $y = \sqrt{x-1}$ (Graph unten)

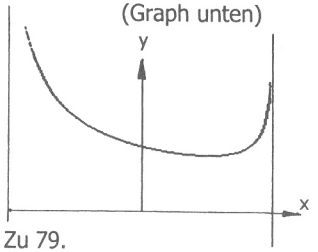
79. $D = (-3, 3)$; T(1.5/1.73); Asymptoten: $x = \pm 3$ (Graph unten)



Zu 77.



Zu 78.



Zu 79.

80a) $a = b = 5$, $S = 10$ **b)** $a = 21$, $b = 1$, $S = 22$ **c)** $a = 1$, $b = 4$, $S = 5$

35 **81.** Für die Zahl 1 **82a)** 45° **b)** 45° **83.** Je $4\sqrt{2}$ cm (Quadrat)
84. 2 cm² (Quadrat) **85.** 53.13°

86. $r = 5$ cm, $b = 10$ cm, $\alpha \approx 114.59°$ **87.** $2\sqrt{3}$

88. Gleichseitiges Dreieck: Seitenlänge 8 cm

89. Zylinder mit Achse *senkrecht* zur Kreisfläche: $h=r=3\sqrt{2}$ cm, Mantelfläche 36π cm²
Zylinder mit Achse *parallel* zur Kreisfläche: $h=6\sqrt{2}$ cm, $r=1.5\sqrt{2}$ cm, Mantelfläche 36π cm²

90. Je 2.5 cm **91.** $r \approx 5.4$ cm, $h \approx 10.8$ cm **92.** 2 dm, 2 dm, 1 dm

36 **93.** 16 cm, 8 cm, 8 cm, 8 cm **94.** r=12 cm, h=9 cm
95. 90° **96.** Je 120° **97.** 111.47°, 137.06°, 111.47°

98a) $m = -\frac{1}{8}$ **b)** $m = -\frac{1}{2}$ **99.** $A = 48$ cm² **100.** 7.48 m

101. $P(\pm 1/\pm 1)$ **102.** $P(\pm\sqrt{2}/1)$

37 **103a)** Wendepunkt $W_1(-3/2)$ **b)** Wendepunkt $W_2(1/2)$
104. $Q(\frac{\sqrt{2}}{2}/\frac{\sqrt{2}}{2})$ **105.** 45° **106a)** 698.10 Fr. **b)** 149.70 Fr.

107a) $N_1(0/0)$, $N_{2,3}(\pm\sqrt{a}/0)$; $A = \frac{a^2}{4(a-3)}$ **b)** $a = 6$

108a) Seite $s \approx 8.51$ **b)** $A \approx 161.80$ **109.** 162.20°

38 **110a)** $A = \frac{2}{\sin\varepsilon \cdot \cos\varepsilon}$ **b)** 45°
111a) $P(\frac{3\pi}{4}/\frac{\sqrt{2}}{2})$; $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ **b)** $P(\frac{5\pi}{4}/1+\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\overline{PQ} = 1+\sqrt{2} \approx 2.41$

112a) H(0/4), W(±2/3); As.: $y = 0$ **b)** $C(2\sqrt{3}/2)$, $D(-2\sqrt{3}/2)$

113a) P(1/2) **b)** $A = 4$ **114.** $a = 2$

115a) $D = [0, +\infty)$, N(0/0), N(9/0), H(4/4) **b)** Q(5.76/3.456) **116.** 8.32 m

117. $r = h \approx 4.6$ cm **118.** $h = 4$ (Tipp: ähnliche Dreiecke, Kettenregel)

119a) S(0/0), W(± 6/± 4.5); As.: $y = x$ **b)** $d = \frac{6}{7}$ **c)** $P_{1,2}(\pm 2\sqrt{3} / \sqrt{3})$

39

120a) $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ cm ≈ 5.7 cm **b)** 22.5°

121a) $a = 4$, $b = -2$
b) N bei 0.25, $\frac{\pi}{2}$, 2.89, $\frac{3\pi}{2}$; H(0.88/2.65), T(2.26/-2.65), H(3.85/5.47), T(5.58/-5.47)

122a) As.: $x = 0$, $y = 1$; keine Nullstellen, Extrema, Wendepunkte
b) t: $y = -\frac{2}{u^3}x + \frac{u^2+3}{u^2}$; Flächeninhalt $A(u) = \frac{(u^2+3)^2}{u}$; P(1/2) **c)** $A = 4$

123a) $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$; N(± 2/0), H(0/4), W(± 0.58/2.75); As.: $y = -1$
b) Tangenten in N: $y = \pm 0.8x + 1.6$; $A = 3.2$
c) Punkte auf der Kurve: P(±1/1.5); $A = 5$

124a) $D = (-\infty, 5]$; N(5/0), T(0/0), H(4/4) **b)** z.Bsp. mit den Steigungen in Q
c) Kreis k: $(x - 2.5)^2 + y^2 = 2.5^2$; Schnittpunkt S(2.52/2.50)

40

125a) -- **b)** $t: y = -\frac{16}{u^3}x + \frac{24}{u^2}$, $Q(-\frac{u}{2}/\frac{32}{u^2})$ (aus $2x^3 - 3ux^2 + u^3 = 0$)
c) $P(2\sqrt{2}/1)$, $Q(-\sqrt{2}/4)$, $\overline{PQ} = 3\sqrt{3}$

126a) N(2.91/0), N(6.06/0), $H(\frac{\pi}{2}/1.5)$, $T(\frac{3\pi}{2}/-2.5)$, $W(\frac{7\pi}{6}/-0.75)$, $W(\frac{11\pi}{6}/-0.75)$
b) p: $y = -\frac{2}{\pi^2}x^2 + 2$ **c)** 32.48°

127a) N(±2/0), keine Extrema, As.: $x = 0$, $y = -1$ für $x \to \pm\infty$ **b)** $y = \pm\frac{8}{a^3}x + \frac{12-a^2}{a^2}$
c) $A = \frac{18}{a}$ **d)** I. 0.018, II. 18 000 **e)** $A \to 0$ für $a \to \infty$, $A \to \infty$ für $a \to 0$

6. INTEGRALRECHNUNG II

41

1a) $3x^2$ **b)** $15x^4 - 1$ **c)** $x^3 + 8x$ **d)** $8x^3 - 15x^2$

2a) $-\frac{1}{x^2}$ **b)** $-\frac{12}{x^4}$ **c)** $-\frac{10}{x^3} - \frac{10}{x^6}$ **d)** $-\frac{6}{x^7} - \frac{3x^5}{2}$

3a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **b)** $3\sqrt{x}$ **c)** $1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **d)** $2.5\sqrt{x^3} + 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4a) $3\cos x$ **b)** $-4\sin x \cdot \cos x$ **c)** $\tan^2 x$ **d)** $2\cos^2 x$

5a) $7x + C$ **b)** $1.5x^2 + C$ **c)** $2x^2 - 5x + C$
d) $x^3 - 4x^2 + C$ **e)** $\sin x + C$ **f)** $-\cos x + C$

6a) $-\frac{1}{x} + C$ **b)** $-\frac{1}{x^3} + C$ **c)** $-\frac{1}{x^2} - x^4 + C$
d) $-\frac{1}{u^4} + \frac{5}{3u^3} + 2u + C$ **e)** $-\frac{1}{6x^6} + C$ **f)** $-\frac{4}{x} - \frac{7}{x^2} - \frac{10}{3x^3} + C$

7a) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$ **b)** $\frac{2\sqrt{x^7}}{7} + C$ **c)** $\frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + C$

8a), b) Ableiten des Terms auf der rechten Seite

9a) $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 4)$ **b)** $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{4x}$ **c)** $f(x) = \frac{x^3 - 12x + 16}{8x^2}$