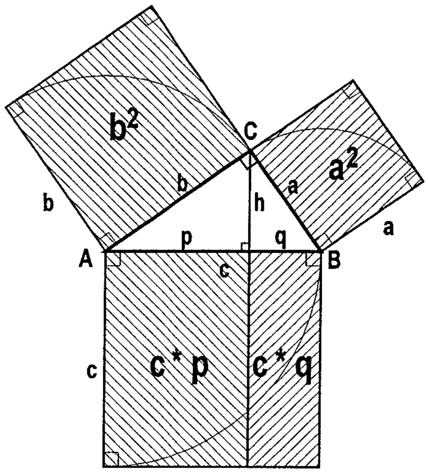
Kathetensatz, Höhensatz, Pythagoras

Aufgaben:

1. Die aus der Ähnlichkeit von rechtwinkligen Dreiecken hergeleiteten Produktgleichungen stellen Beziehungen zwischen Flächen dar. Konstruiere bei den gegebenen Dreiecken diese Flächen und male gleich grosse Flächen mit gleichen Farben aus.
2. Löse die Produktgleichungen nach allen Variablen auf.
3. Die Gleichung für den pythagoreischen Lehrsatz (des Pythagoras'), welcher die Beziehung zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks beschreibt, ergibt sich aus der Addition der Gleichung ① und ②. Übertrage dieses Ergebnis ins Feld ④.

   $a^2 + b^2 = c * q + c * p = c(q + p) = c * c = c^2$
4. Formuliere jeden Lehrsatz in Worten.



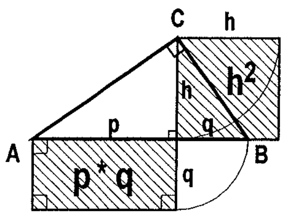
Kathetensatz

① $\boxed{b^2 = c * p}$ ② $\boxed{a^2 = c * q}$

$a = \sqrt{c * q}$ $b = \sqrt{c * p}$ $c = b^2 : p$

$p = b^2 : c$ $q = a^2 : c$ $c = a^2 : q$

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist ein Kathetenquadrat flächengleich dem Rechteck, gebildet aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

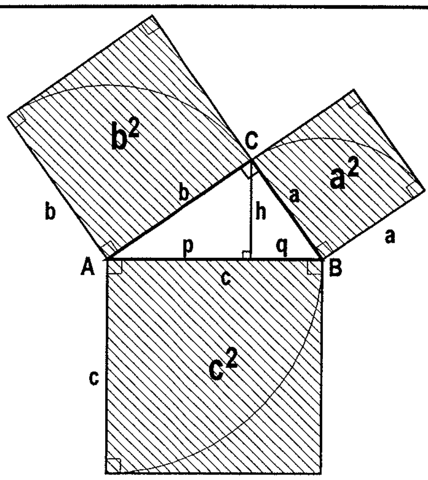


Höhensatz

③ $\boxed{h^2 = p * q}$

$h = \sqrt{p * q}$ $p = h^2 : q$ $q = h^2 : p$

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Höhenquadrat flächengleich dem Rechteck, gebildet aus den beiden Hypotenusenabschnitten.



Pythagoras

④ $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.

Übung: Kathetensatz, Höhensatz, Pythagoras - 1. Teil

Aufgabe 1: Berechne die fehlenden Grössen von rechtwinkligen Dreiecken.
a, b: Katheten c: Hypotenuse alle Masse in cm

	a	b	c
a)	3	4	***5***
b)	6	***8***	10
c)	***9***	12	15
d)	***12***	16	***20***
e)	15	***20***	***25***
f)	***18***	24	***30***
g)	3x	***4x***	***5x***

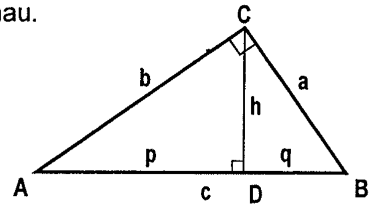
	a	b	c
h)	5	12	***13***
i)	8	***15***	17
j)	7	24	***25***
k)	***9***	40	41
l)	11	***60***	61
m)	***12***	35	37
n)	28	45	***53***

	a	b	c
o)	99	***20***	101
p)	***91***	60	109
q)	15	112	***113***
r)	117	***44***	125
s)	***88***	105	137
t)	17	144	***145***
u)	51	***140***	149

Das Verhältnis a : b : c = 3 : 4 : 5 ist das kleinste ganzzahlige Seitenverhältnis in rechtwinkligen Dreiecken.

Aufgabe 2: Berechne die fehlenden Tabellenwerte auf eine Stelle genau.

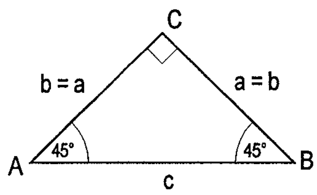
A_1: Fläche des Dreieckes ABC
A_2: Fläche des Teildreieckes ADC
A_3: Fläche des Teildreieckes DBC



	a	b	c	p	q	h	A_1	A_2	A_3
a)	40 m	30 m	***50 m***	***18 m***	***32 m***	***24 m***	***600 m²***	***216 m²***	***384 m²***
b)	8 m	***6 m***	10 m	***3.6 m***	***6.4 m***	***4.8 m***	***24 m²***	***8.64 m²***	***15.36 m²***
c)	***17.9 m***	***35.8 m***	***40 m***	32 m	***8 m***	16 m	***320 m²***	***256 m²***	***64 m²***
d)	***53.9 m***	***21.5 m***	***58 m***	8 m	50 m	***20 m***	***580 m²***	***80 m²***	***500 m²***
e)	***12 m***	5 m	***13 m***	***1.9 m***	***11.1 m***	***4.6 m***	30 m²	***4.4 m²***	***25.6 m²***
f)	***9.1 m***	***17 m***	***19.3 m***	***15 m***	***4.3 m***	8 m	***77.1 m²***	60 m²	***17.1 m²***
g)	***25 m***	***85.7 m***	***89.3 m***	***82.3 m***	7 m	***24 m***	***1071.4 m²***	***987.4 m²***	84 m²

Aufgabe 3: Erarbeite die Berechnungsformeln für die folgenden speziellen Dreiecke.

a) Gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck

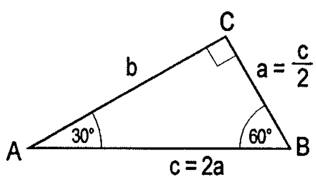


$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

$a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c * \sqrt{2}}{\sqrt{2} * \sqrt{2}} = \frac{c}{2} * \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 1.414...$

b) 30°/60°/90° Dreieck

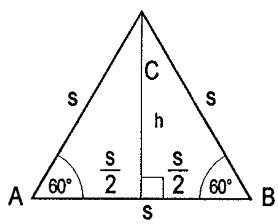


$b = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

$a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{b * \sqrt{3}}{\sqrt{3} * \sqrt{3}} = \frac{b}{3} * \sqrt{3}$

$\sqrt{3} = 1.732...$

c) Gleichseitiges Dreieck



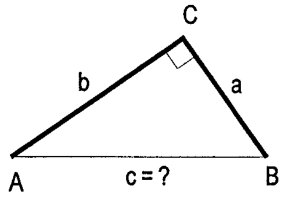
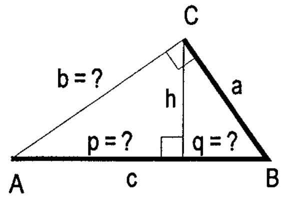
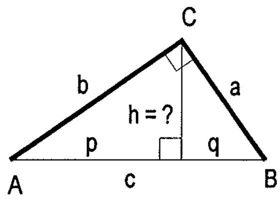
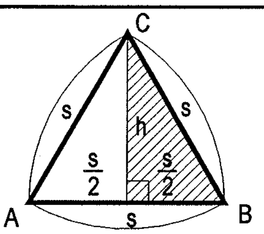
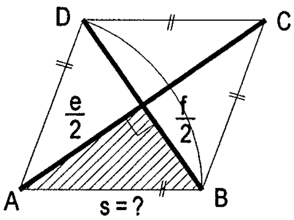
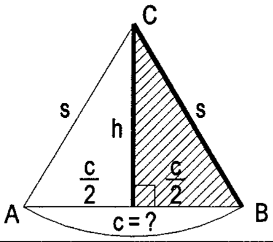
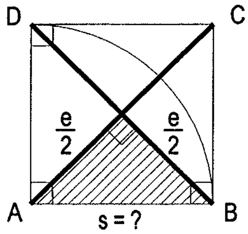
$h = \sqrt{s^2 - (\frac{s}{2})^2} = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}}$

$h = \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{s}{2} * \sqrt{3}$

$s = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h * \sqrt{3}}{\sqrt{3} * \sqrt{3}} = \frac{2h}{3} * \sqrt{3}$

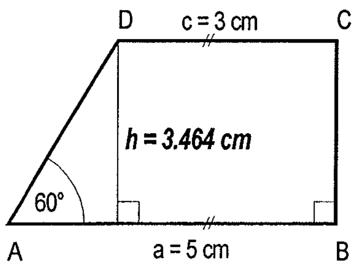
$\boxed{c = a\sqrt{2}}$ $\boxed{a = \frac{c}{2} * \sqrt{2}}$ $\boxed{b = a\sqrt{3}}$ $\boxed{a = \frac{b}{3} * \sqrt{3}}$ $\boxed{h = \frac{s}{2} * \sqrt{3}}$ $\boxed{s = \frac{2h}{3} * \sqrt{3}}$

Übung: Kathetensatz, Höhensatz, Pythagoras - 2. Teil

AUFGABE	SCHAUFIGUR	BERECHNUNG *(Runde auf eine Stelle genau.)*
1. Wie gross ist in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse c, wenn die Katheten a = 20 cm und b = 21 cm messen?		$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(20\ cm)^2 + (21\ cm)^2}$ $c = \sqrt{841\ cm^2} = \underline{29\ cm}$
2. In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt die Hypotenuse c = 17 cm und die Kathete a = 15 cm. Berechne die Kathete b und die Hypotenusenabschnitte p und q.		$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(17\ cm)^2 + (15\ cm)^2} = \underline{8\ cm}$ $p = b^2 : c = (8\ cm)^2 : 17\ cm = \underline{3.8\ cm}$ $q = a^2 : c = (15\ cm)^2 : 17\ cm = \underline{13.2\ cm}$ $(\ c = p + q = 3.8\ cm + 13.2\ cm = 17\ cm\ )$
3. Berechne in einem rechtwinkligen Dreieck die Höhe h, wenn die Katheten a = 84 cm und b = 187 cm messen.		$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(84\ cm)^2+(187\ cm)^2} = 205\ cm$ $p = b^2 : c = (187\ cm)^2 : 205\ cm = 170.6\ cm$ $q = a^2 : c = (84\ cm)^2 : 205\ cm = 34.4\ cm$ $h = \sqrt{p*q} = \sqrt{170.6\ cm * 34.4\ cm} = \underline{76.6\ cm}$
4. Berechne die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit s = 9 cm.		$h = \frac{s}{2}\sqrt{3} = \frac{9\ cm}{2} * 1.732 = 7.8\ cm$ $A = \frac{s * h}{2} = \frac{9\ cm * 7.8\ cm}{2} = \underline{35.1\ cm^2}$
5. Die Diagonalen eines Rhombus' messen e = 120 mm und f = 442 mm. Berechne die Rhombusseite s.		$s = \sqrt{(\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2}$ $s = \sqrt{(\frac{120\ mm}{2})^2 + (\frac{442\ mm}{2})^2}$ $s = \sqrt{(60\ mm)^2 + (221\ mm)^2}$ $s = \underline{229\ mm}$
6. Berechne in einem gleichschenkligen Dreieck die Basis c, wenn die Schenkel s = 289 mm und die Basishöhe 161 mm messen.		$\frac{c}{2} = \sqrt{s^2 - h^2} = \sqrt{(289\ mm)^2 - (161\ mm)^2}$ $\frac{c}{2} = 240\ mm$ $c = \underline{480\ mm}$
7. Berechne die Fläche und den Umfang eines Quadrates mit der Diagonale e = 20 cm.		$s = \frac{e}{2} * \sqrt{2} = \frac{20\ cm}{2} * 1.414 = 14.14\ cm$ $u = 4 * s = 4 * 14.14\ cm = \underline{56.6\ cm}$ $A = \frac{e^2}{2} = \frac{(20\ cm)^2}{2} = \underline{200\ cm^2}$

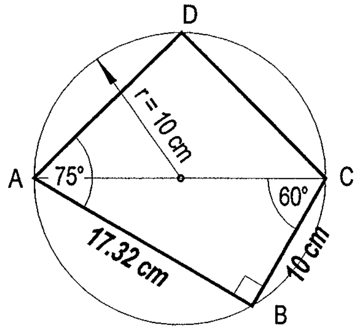
Übung: Kathetensatz, Höhensatz, Pythagoras - 3. Teil

8. Berechne die Fläche A des Trapezes ABCD.



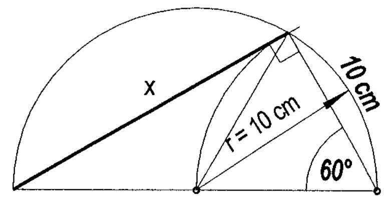
A = 13.9 cm²

9. Berechne die Fläche A des Vierecks ABCD.



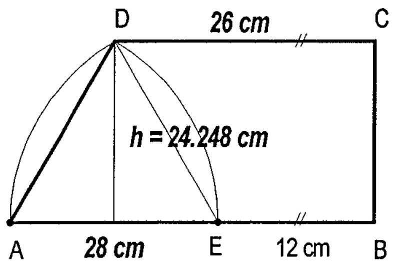
A = 186.6 cm²

10. Berechne x.



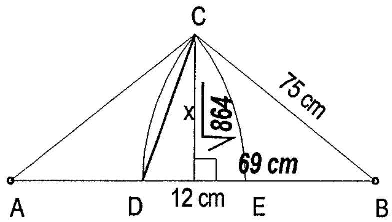
$x = 10\ cm * \sqrt{3} = 17.3\ cm$

11. Berechne die Fläche A des Trapezes ABCD. Die Fläche AED beträgt 339.5 cm^2.



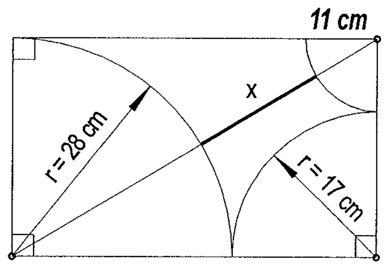
A = 800.2 cm²

12. Berechne x.



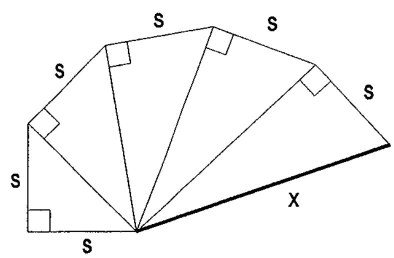
x = 30 cm

13. Berechne x.



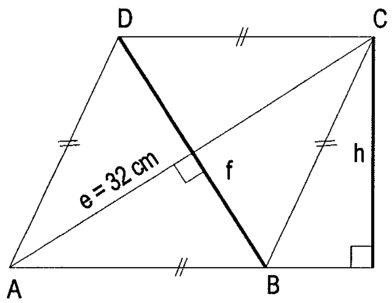
x = 53 cm – 39 cm = 14 cm

14. Berechne x, wenn s = 8 cm beträgt.



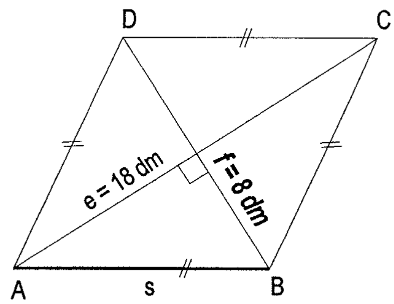
$x = \sqrt{6s^2} = 19.6\ cm$

15. Der Umfang des Rhombus' misst 80 cm. Berechne f und h.



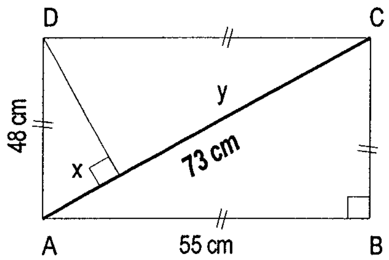
f = 24 cm   h = 19.2 cm

16. Die Fläche des Rhombus' beträgt 72 dm^2. Berechne die Länge der Rhombusseite s.



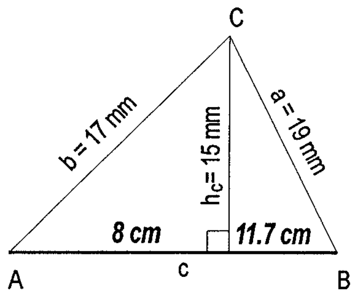
s = 9.8 dm

17. Berechne die Länge der Diagonalenabschnitte x und y im Rechteck ABCD.



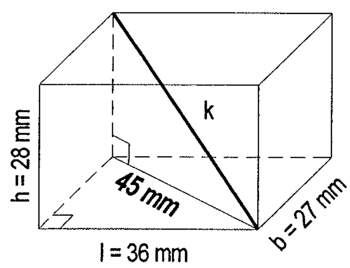
x = 31.6 cm   y = 41.4 cm

18. Berechne die Länge der Seite c des Dreiecks ABC.



c = 19.7 cm

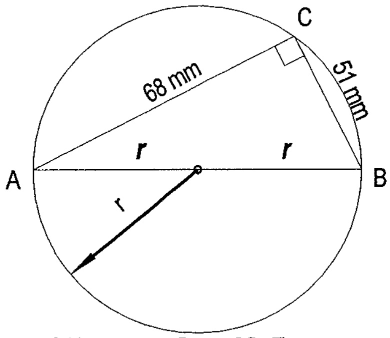
19. Berechne die Länge der Körperdiagonale k des folgenden Quaders.



k = 53 mm

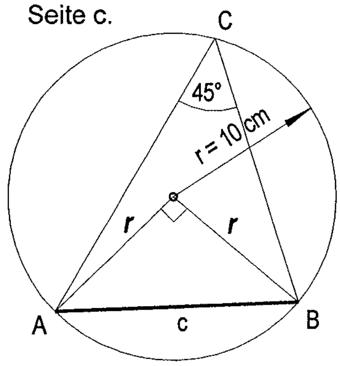
Übung: Kathetensatz, Höhensatz, Pythagoras - 4. Teil

20. Berechne den Umkreisradius r des Dreiecks ABC.



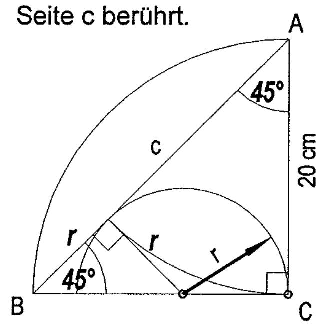
$r = 85\ mm : 2 = 42.5\ mm$

21. Berechne die Länge der Seite c.



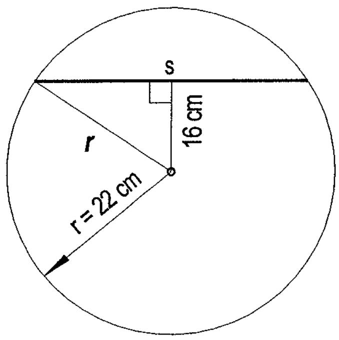
$c = r * \sqrt{2} = 14.1\ cm$

22. Berechne den Radius r des Halbkreises, welcher die Seite c berührt.



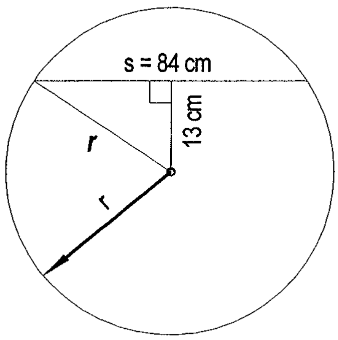
$r = 28.3\ cm - 20\ cm = 8.3\ cm$

23. Berechne die Länge der Sehne s.



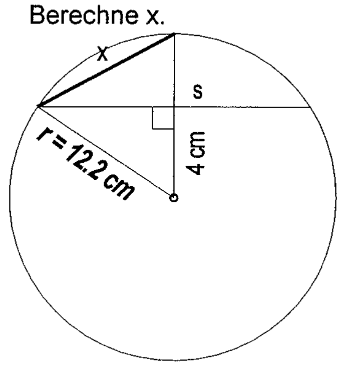
$s = 2 * 15.1\ cm = 30.2\ cm$

24. Berechne den Kreisradius r.



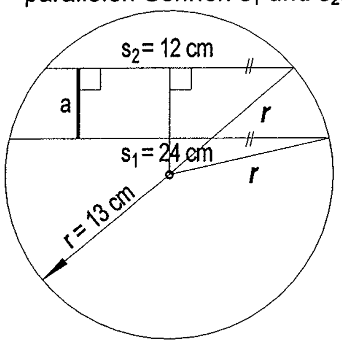
$r = 44.0\ cm$

25. Die Sehne s misst 23 cm. Berechne x.



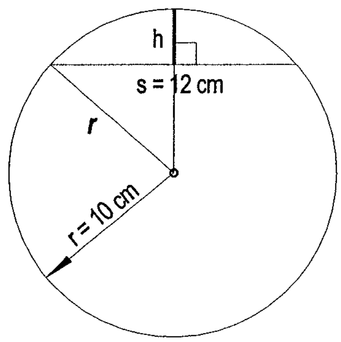
$x = 14.1\ cm$

26. Berechne den Abstand a der parallelen Sehnen s_1 und s_2.



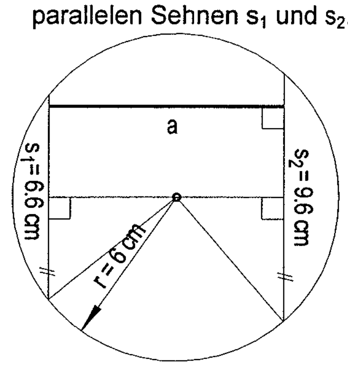
$a = 11.5\ cm - 5\ cm = 6.5\ cm$

27. Berechne die Segmenthöhe h.



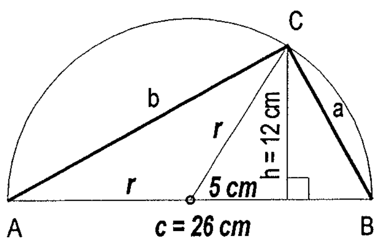
$h = 10\ cm - 8cm = 2\ cm$

28. Berechne den Abstand a der parallelen Sehnen s_1 und s_2.



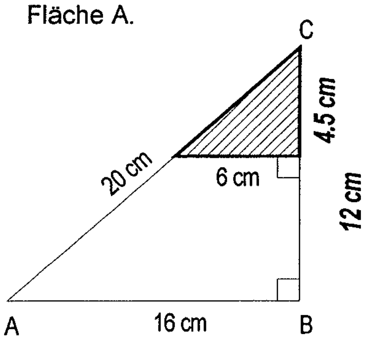
$a = 5\ cm + 3.6\ cm = 8.6\ cm$

29. Die Dreiecksfläche beträgt 156 cm^2. Berechne a und b.



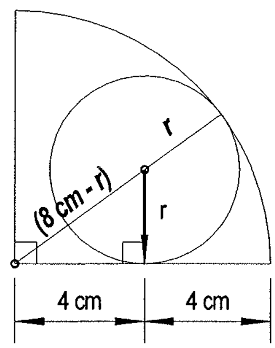
$a = 14.4\ cm \quad b = 21.6\ cm$

30. Berechne die schraffierte Fläche A.



$A = 13.5\ cm^2$

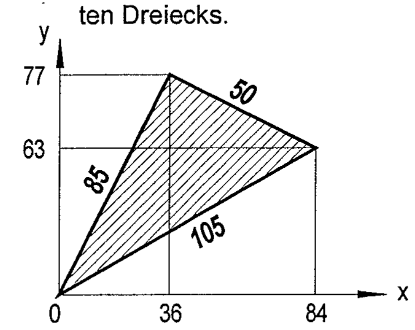
31. Berechne den Kreisradius r.



$r = 3\ cm$

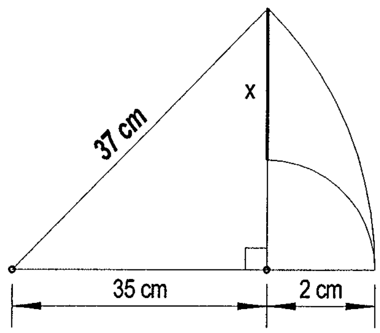
Übung: Kathetensatz, Höhensatz, Pythagoras - 5. Teil

32. Berechne den Umfang u und die Fläche A des schraffierten Dreiecks.



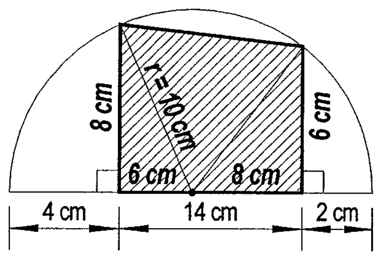
u = 240 A = 2100

33. Berechne x.



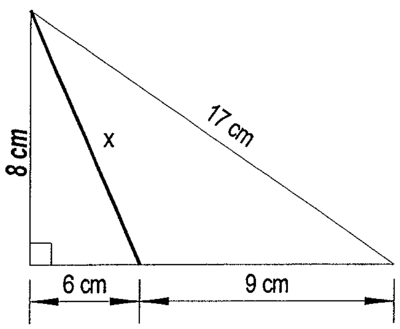
x = 12 cm - 2 cm = 10 cm

34. Berechne die Fläche A des schraffierten Trapezes.



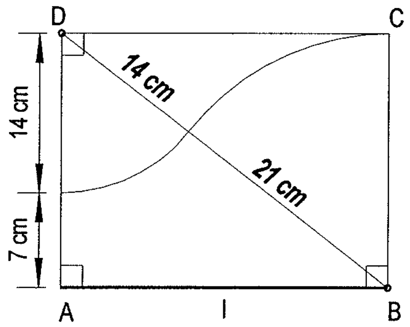
A = 7 cm * 14 cm = 98 cm²

35. Berechne x.



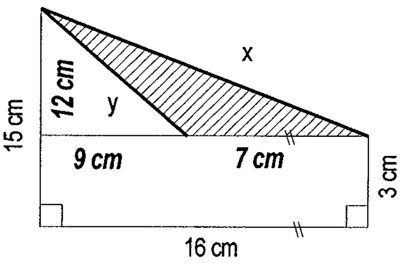
x = 10 cm

36. Berechne die Länge l des Rechtecks ABCD.



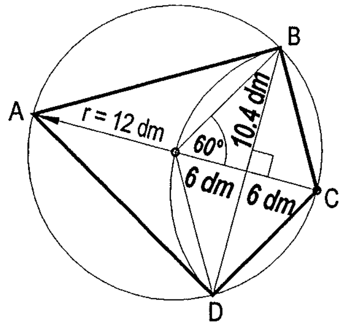
l = 28 cm

37. Berechne x und y, wenn die schraffierte Fläche $\frac{7}{24}$ der Trapezfläche beträgt.



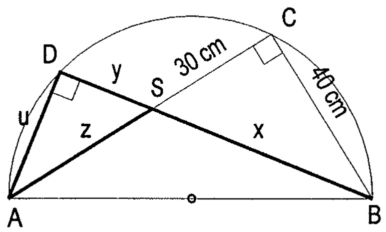
x = 20 cm y = 15 cm

38. Berechne die Fläche A des Vierecks ABCD.



A = 249.4 dm²

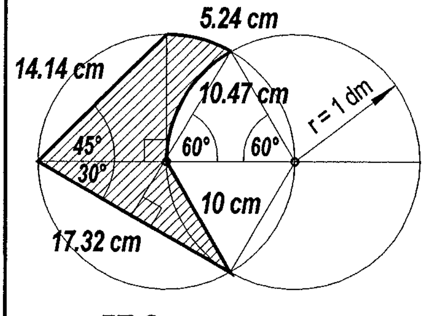
39. Berechne u, x, y und z, wenn $\overline{BC}$ = 40 cm, $\overline{CS}$ = 30 cm und $\overline{BD}$ = 74 cm messen.



u = 32 cm x = 50 cm

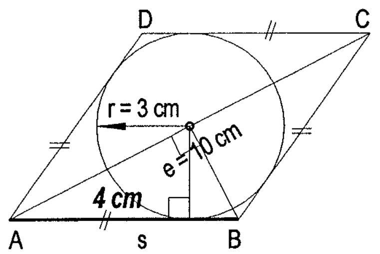
y = 24 cm z = 40 cm

40. Berechne den Umfang u der schraffierten Figur auf mm genau.



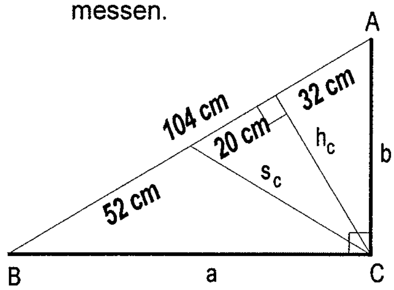
u = 57.2 cm

41. Berechne die Rhombusseite s und die -fläche A, wenn der Inkreisradius r und die Diagonale e gegeben sind.



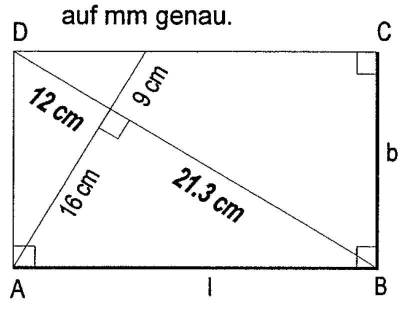
s = 6.25 cm A = 37.5 cm²

42. Berechne die Länge der Katheten auf mm genau, wenn h_c = 48 cm und s_c = 52 cm messen.



a = 86.5 cm b = 57.7 cm

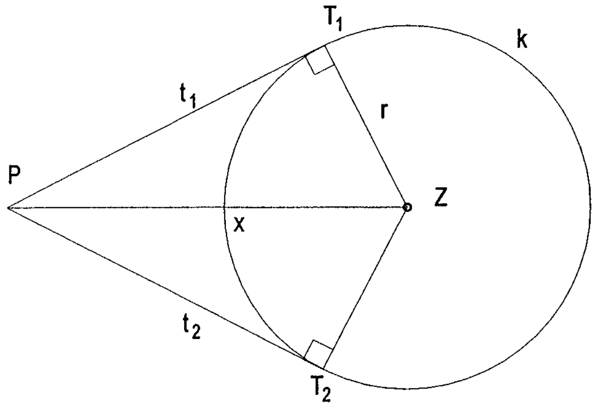
43. Berechne die Länge l und die Breite b des Rechtecks ABCD auf mm genau.



l = 26.7 cm b = 20 cm

Übung: Kathetensatz, Höhensatz, Pythagoras - 6. Teil

44. Die Tangentenabschnitte von einem Punkt P an einen Kreis k mit Radius 52 mm messen 173 mm. Wie weit ist der Punkt P vom Kreiszentrum Z entfernt (Genauigkeit: 1 Stelle)?

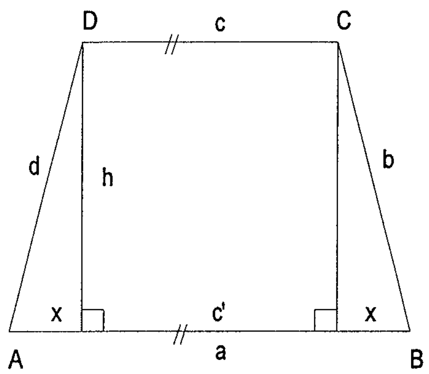


$$x = \sqrt{t^2 + r^2} = \sqrt{(173\ mm)^2 + (52\ mm)^2}$$

$$x = 180.64\ mm$$

Die Entfernung beträgt <u>180.6 mm</u>.

45. Berechne den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Trapezes ABCD mit folgenden Massen: a = 152 mm, b = d = 74 mm und c = 64 mm (Genauigkeit: 1 Stelle).



$$x = \frac{a - c}{2} = \frac{152\ mm - 64\ mm}{2} = 44\ mm$$

$$h = \sqrt{d^2 - x^2} = \sqrt{(74\ mm)^2 - (44\ mm)^2}$$

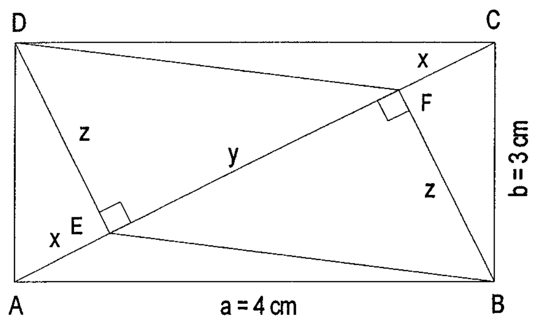
$$h = 59.49\ mm$$

$$A = \frac{a + c}{2} * h = \frac{152\ mm + 64\ mm}{2} * 59.49\ mm$$

$$A = 6\,425.77\ mm^2$$

Die Trapezfläche beträgt <u>6 425.8 mm²</u>.

46. Vom Rechteck ABCD sind die Seiten a = 4 cm und b = 3 cm gegeben. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks DEBF.



$$e = \overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(4\ cm)^2 + (3\ cm)^2}$$

$$e = 5\ cm$$

$$A_{ABC} = \frac{a * b}{2} = \frac{4\ cm * 3\ cm}{2} = 6\ cm^2$$

$$z = \frac{2 * A_{ABC}}{e} = \frac{2 * 6\ cm^2}{5\ cm} = 2.4\ cm$$

$$x = \frac{b^2}{e} = \frac{(3\ cm)^2}{5\ cm} = 1.8\ cm$$

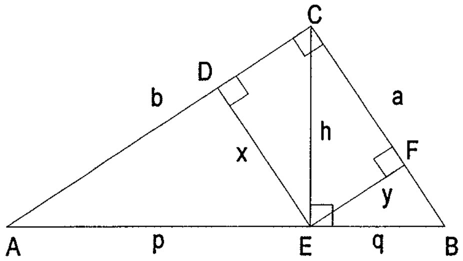
$$y = e - 2x = 5\ cm - 2 * 1.8\ cm = 1.4\ cm$$

$$A_{DEBF} = y * z = 1.4\ cm * 2.4\ cm = 3.36\ cm^2$$

Die Vierecksfläche beträgt <u>3.36 cm²</u>.

Übung: Kathetensatz, Höhensatz, Pythagoras - 6. Teil

47.



Vom Dreieck ABC sind die Hypotenusenabschnitte mit p = 96 mm und q = 54 mm gegeben. Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks CDEF.

$$h = \sqrt{p * q} = \sqrt{96\ mm * 54\ mm} = 72\ mm$$

$$a = \sqrt{q^2 + h^2} = \sqrt{(54\ mm)^2 + (72\ mm)^2} = 90\ mm$$

$$b = \sqrt{p^2 + h^2} = \sqrt{(96\ mm)^2 + (72\ mm)^2} = 120\ mm$$

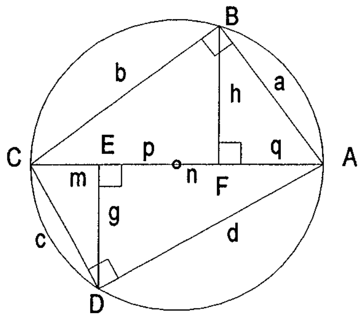
$$x = \frac{2 * A_{AEC}}{b} = \frac{p * h}{b} = \frac{96\ mm * 72\ mm}{120\ mm} = 57.6\ mm$$

$$y = \frac{2 * A_{EBC}}{a} = \frac{q * h}{a} = \frac{54\ mm * 72\ mm}{90\ mm} = 43.2\ mm$$

$$A_{CDEF} = x * y = 57.6\ mm * 43.2\ mm = 2\,488.32\ mm^2$$

Die Fläche des Rechtecks CDEF beträgt <u>2 488.32 mm²</u>.

48.



Berechne den Umfang des Vierecks ABCD, wenn folgende Masse gegeben sind (Genauigkeit: 1 Stelle):

$\overline{BC}$ = 20 cm

$\overline{BF}$ = 12 cm

$\overline{CE}$ = 5 cm

$$p = \sqrt{b^2 - h^2} = \sqrt{(20\ cm)^2 - (12\ cm)^2} = 16\ cm$$

$$q = \frac{h^2}{p} = \frac{(12\ cm)^2}{16\ cm} = 9\ cm$$

$$a = \sqrt{h^2 + q^2} = \sqrt{(12\ cm)^2 + (9\ cm)^2} = 15\ cm$$

$$\overline{AC} = e = p + q = 16\ cm + 9\ cm = 25\ cm$$

$$c = \sqrt{e * m} = \sqrt{25\ cm * 5\ cm} = 11.18\ cm$$

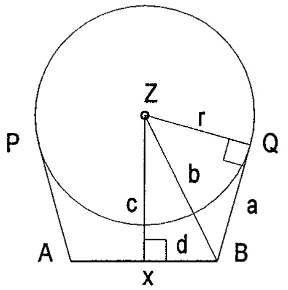
$$d = \sqrt{e^2 - c^2} = \sqrt{(25\ cm)^2 - (11.18\ cm)^2} = \sqrt{500\ cm^2} = 22.36\ cm$$

$$u = a + b + c + d = 15\ cm + 20\ cm + 11.18\ cm + 22.36\ cm = 68.54\ cm$$

Der Umfang des Vierecks ABCD beträgt <u>68.5 cm</u>.

Übung: Kathetensatz, Höhensatz, Pythagoras - 6. Teil

49.



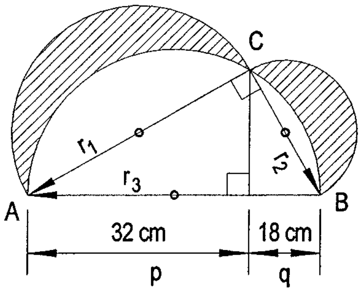
Ein Rohr von 20.8 dm Durchmesser wird von Stützen mit der Länge von 7.8 dm getragen. Die Stützen $\overline{AP}$ und $\overline{BQ}$ berühren das Rohr tangential. Der tiefste Punkt des Rohrs liegt 1.6 dm über Boden. Wie weit sind die Fusspunkte der Stützen voneinander entfernt?

$$r = d : 2 = 20.8\ dm : 2 = 10.4\ dm$$
$$c = r + 1.6\ dm = 10.4\ dm + 1.6\ dm = 12\ dm$$
$$b = \sqrt{r^2 + a^2} = \sqrt{(10.4\ dm)^2 + (7.8\ dm)^2} = 13\ dm$$
$$d = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{(13\ dm)^2 - (12\ dm)^2} = 5\ dm$$
$$x = 2 * d = 2 * 5\ dm = 10\ dm$$

Die Fusspunkte der Stützen sind <u>10 dm</u> voneinander entfernt.

50. Berechne den Inhalt der schraffierten Flächen.

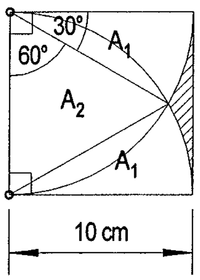
a) Verwende für π keinen Zahlenwert.



$$r_3 = c : 2 = (p + q) : 2 = (32\ cm + 18\ cm) : 2 = 25\ cm$$
$$r_1 = b : 2 = \sqrt{c * p} : 2 = \sqrt{50\ cm * 32\ cm} : 2 = 20\ cm$$
$$r_2 = a : 2 = \sqrt{c * q} : 2 = \sqrt{50\ cm * 18\ cm} : 2 = 15\ cm$$
$$A_{ABC} = \frac{a * b}{2} = \frac{30\ cm * 40\ cm}{2} = 600\ cm^2$$
$$A_{Halbkreis\ 1} = r_1^2\pi : 2 = (20\ cm)^2\pi : 2 = 200\pi\ cm^2$$
$$A_{Halbkreis\ 2} = r_2^2\pi : 2 = (15\ cm)^2\pi : 2 = 112.5\pi\ cm^2$$
$$A_{Halbkreis\ 3} = r_3^2\pi : 2 = (25\ cm)^2\pi : 2 = 312.5\pi\ cm^2$$
$$A = A_{ABC} + A_{Halbkreis\ 1} + A_{Halbkreis\ 2} - A_{Halbkreis\ 3}$$
$$A = 600\ cm^2 + 200\pi\ cm^2 + 112.5\pi\ cm^2 - 312.5\pi\ cm^2$$
$$A = 600\ cm^2$$

Die schraffierte Fläche beträgt <u>600 cm²</u>.

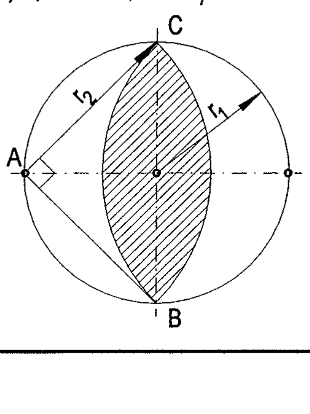
b) π aus TR, 2 Stellen genau



$$A_{Quadrat} = s^2 = (10\ cm)^2 = 100\ cm^2$$
$$2A_1 = r^2\pi : 6 = (10\ cm)^2\pi : 6 = 52.36\ cm^2$$
$$A_2 = s * h : 2 = s * \frac{s}{2} * \sqrt{3} : 2$$
$$A_2 = 10\ cm * \frac{10\ cm}{2} * \sqrt{3} : 2 = 43.30\ cm^2$$
$$A = A_{Quadrat} - 2A_1 - A_2$$
$$A = 100\ cm^2 - 52.36\ cm^2 - 43.30\ cm^2 = 4.34\ cm^2$$

Die schraffierte Fläche beträgt <u>4.34 cm²</u>.

c) $r_1 = 7$ cm, $\pi = 3\frac{1}{7}$



$$r_2 = r_1 * \sqrt{2} = 7\ cm * \sqrt{2} = 9.898\ cm$$
$$A_{Viertelkreis\ 2} = r_2^2\pi : 4 = (7\ cm * \sqrt{2})^2 * 3\tfrac{1}{7} : 4 = 77\ cm^2$$
$$A_{ABC} = r_2^2 : 2 = (7\ cm * \sqrt{2})^2 : 2 = 49\ cm^2$$
$$A = 2 * (A_{Viertelkreis\ 2} - A_{ABC})$$
$$A = 2 * (77\ cm^2 - 49\ cm^2) = 56\ cm^2$$

Die schraffierte Fläche beträgt <u>56 cm²</u>.