AGS
ALLGEMEINE GEWERBESCHULE BASEL

Urs Wyder, 4057 Basel
Urs.Wyder@edubs.ch

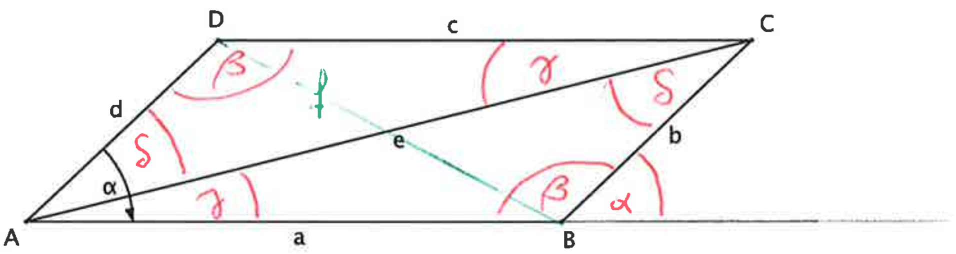
Prüfung GestBM 3P, Freitag, 11.12.2015:

Trigonometrie II

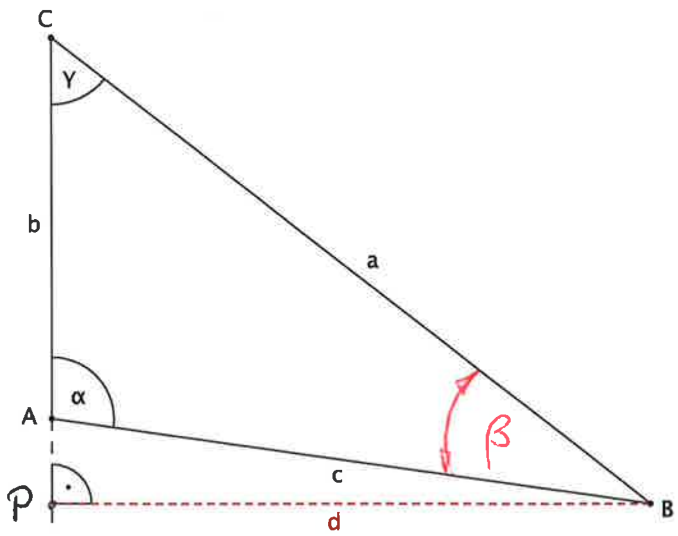
Hinweis:
Es wird eine minimale Genauigkeit von zwei Nachkommastellen erwartet. Speichern Sie Zwischenresultate auf dem TR und runden Sie erst das Endresultat.

1. Im Dreieck ABC ist die Seite a 1.5-mal so lang wie die Seite c und die Seite b ist doppelt so lang wie c. Berechnen Sie die Innenwinkel α, β und γ des Dreiecks ABC.

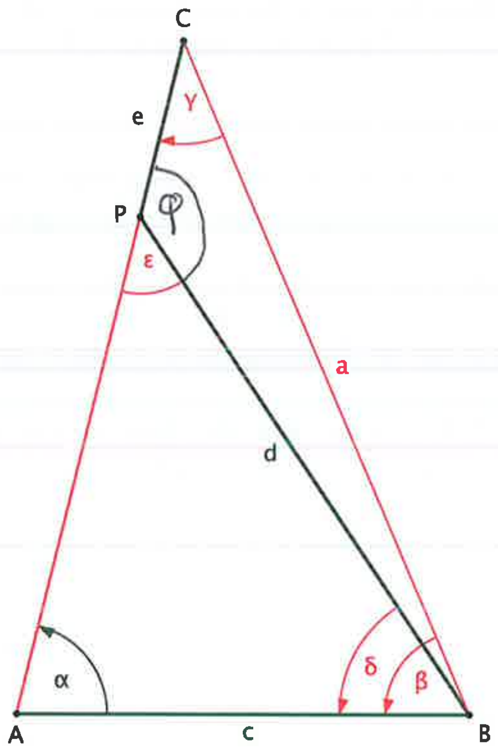
2. Vom Parallelogramm $ABCD$ kennt man den Innenwinkel $\alpha = 43.5°$, die Seitenlänge $a = c = 10\,\text{m}$ und die Diagonale $e = 14\,\text{m}$. Berechnen Sie die Seitenlängen $b = d$ und die Diagonale $f = \overline{BD}$.



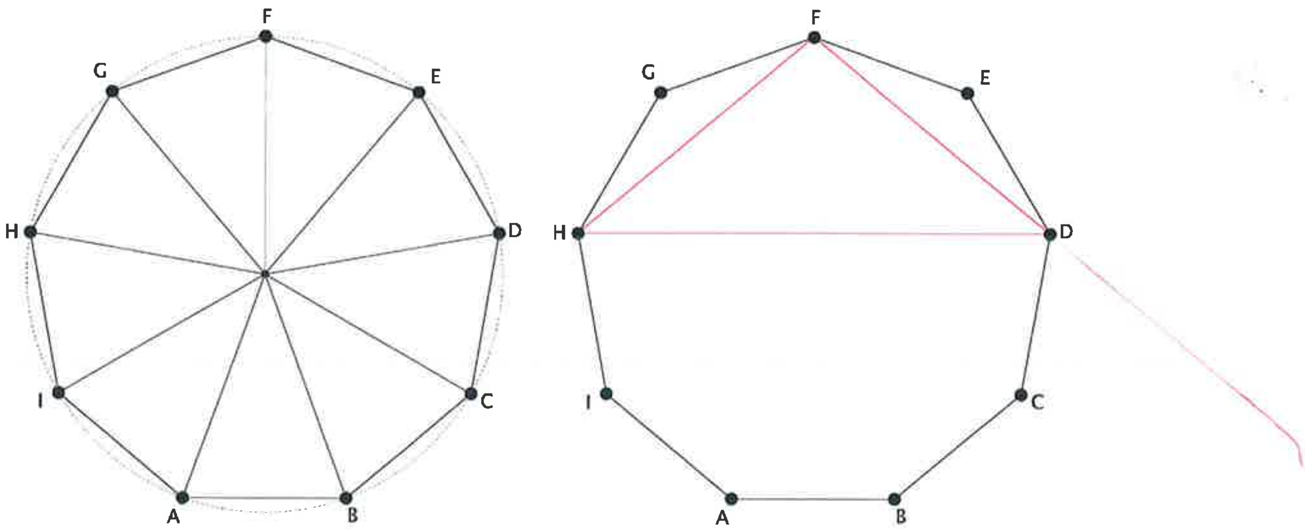
3. Von der 10 Meter langen Grundlinie $b = \overline{AC}$ aus sieht man den Punkt B unter den Winkeln $\alpha = 98.09°$ und $\gamma = 51.96°$. Berechnen Sie den (senkrechten) Abstand d des Punktes B von der Grundlinie b.



4. Berechnen Sie die Seiten a und $b = \overline{AC}$ sowie die Winkel β und γ des Dreiecks ABC, in welchem $c = 10\,\text{m}$, $d = 14.2\,\text{m}$, $e = \overline{PC} = 4.01\,\text{m}$ und $\alpha = 76.15°$ gilt.

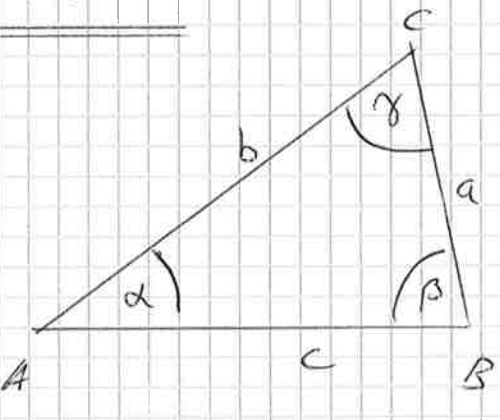


5. Das regelmässige 9-Eck hat eine Seitenlänge von 10 cm. Berechnen Sie die Fläche des rot umrandeten Dreiecks HDF. Das 9-Eck links im Bild dient als Hilfsfigur und kann u.a. bei der Berechnung der Innenwinkel hilfreich sein.



GestBM 3P, 11.12.2015

(1) $a = 1.5c\,,\quad b = 2c$



Cosinus-Satz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \qquad a = 1.5c,\ b = 2c \text{ einsetze}$$

$$\cos\gamma = \frac{c^2 - (1.5c)^2 - (2c)^2}{-2 \cdot 1.5c \cdot 2c} =$$

$$= \frac{c^2 - 2.25c^2 - 4c^2}{-6c^2}$$

$$= \frac{-5.25c^2}{-6c^2} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$\cos\gamma = \frac{7}{8} \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right) = 28.955'024'371\ldots$$

$$\underline{\underline{\cong 28.96^\circ}}$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \frac{(1.5c)^2 - (2c)^2 - c^2}{-2 \cdot 2c \cdot c} = \frac{11}{16}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right) = 46.567'463'442'\ldots$$

$$\underline{\underline{\cong 46.57^\circ}}$$

$$\cos\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{(2c)^2 - (1.5c)^2 - c^2}{-2 \cdot 1.5c \cdot c} = -\frac{1}{4}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) = 104.477'512'186\ldots$$

$$\underline{\underline{\cong 104.48^\circ}}$$

(2) $\alpha = 43.5° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha = 136.5°$

Im $\triangle ACD$ kennt man e, c und β:

↳ SSW → Sinussatz:

$$\frac{\sin\delta}{c} = \frac{\sin\beta}{e} \Rightarrow \sin\delta = \frac{c \cdot \sin\beta}{e}$$

$$\delta = \sin^{-1}\left(\frac{c \cdot \sin\beta}{e}\right) = 29.451'184'08\ldots$$

$$\cong \underline{\underline{29.45°}}$$

$$\gamma = 180° - \delta - \beta = 14.048'815'914\ldots$$

$$\cong \underline{\underline{14.05°}}$$

Seite d:

$$\frac{d}{\sin\gamma} = \frac{e}{\sin\beta} \Rightarrow d = \frac{e \cdot \sin\gamma}{\sin\beta} = 4.937'105\ldots$$

$$\cong \underline{\underline{4.94m}}$$

$$\cong \underline{\underline{4.937m}}$$

Diagonale f:

$$f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha}$$

$$= 7.262'920'627$$

$$\cong 7.263m$$

$$\cong \underline{\underline{7.26m}}$$

③ $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 29.95°$

Seite a berechnen, dann rechtwinkliges $\triangle PBC$ berechnen:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$= 19.830'946'670 \ldots$$

$$a \cong 19.831 m$$

$$\underline{\underline{a \cong 19.83 m}}$$

a ist Hypotenuse im $\triangle PBC$:

$$\sin\gamma = \frac{GK}{H} = \frac{d}{a}$$

$$\Rightarrow d = a \cdot \sin\gamma = 15.618'471'85 \ldots\ldots$$

$$d \cong 15.618 m$$

$$\underline{\underline{d \cong 15.62 m}}$$

(4) $\triangle ABP$: Winkel ε und δ sowie Strecke $\overline{AP}$ berechnen:

$$\frac{\sin\varepsilon}{c} = \frac{\sin\alpha}{d} \Rightarrow \sin\varepsilon = \frac{c\cdot\sin\alpha}{d}$$

$$\varepsilon = \sin^{-1}\left(\frac{c\cdot\sin\alpha}{d}\right)$$

$$\varepsilon = 43.137'422'352\ldots$$

$$\underline{\varepsilon \cong 43.14^\circ}$$

Winkel $\delta = 180^\circ - \alpha - \varepsilon \cong \underline{\underline{60.71^\circ}}$

Winkel $\varphi = 180^\circ - \varepsilon$

$$\underline{\underline{\varphi \cong 136.86^\circ}}$$

Seite a:

$$a = \sqrt{e^2 + d^2 - 2ed\cdot\cos\varphi}$$

$$a = 17.344'251\ldots$$

$$a \cong 17.344\,m$$

$$\underline{\underline{a \cong 17.34\,m}}$$

Winkel γ: $\frac{\sin\gamma}{d} = \frac{\sin\varphi}{a} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{d\cdot\sin\varphi}{a}$

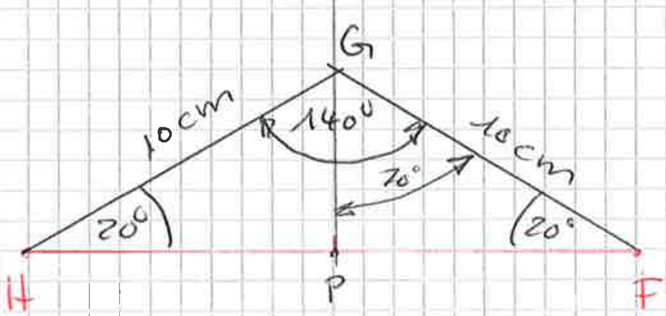
$$\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{d\cdot\sin\varphi}{a}\right) = 34.041'750'37\ldots$$

$$\underline{\underline{\gamma \cong 34.04^\circ / 34.042^\circ}}$$

$\beta = 69.808'249'624\ldots$ $\quad \underline{\underline{\beta = 69.81^\circ / 69.808^\circ}}$

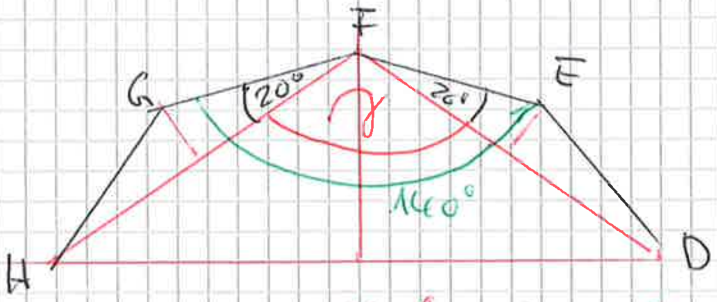
(5) Innenwinkel in reg. 9-Eck: 140°

Betrachte $\triangle HFG$:



Strecke $\overline{HF} = \overline{FD}$ berechnen:

$$\overline{HF} = \sqrt{10^2 + 10^2 - 2\cdot 10\cdot 10\cdot \cos 140°}$$
$$= \sqrt{2\cdot 10^2 - 2\cdot 10^2 \cdot \cos 140°}$$
$$= \sqrt{2\cdot 10^2 (1 - \cos 140°)}$$
$$= 10\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos(140°)}$$
$$\overline{HF} = 18.793'852\ldots$$
$$\overline{HF} \cong 18.794\,cm \,/\, 18.79\,cm$$



$$\gamma = 140° - 2\cdot 20° = 100°$$

$$\text{Fläche} = \tfrac{1}{2}\,\overline{HF}\cdot\overline{FD}\cdot\sin 100° \qquad \overline{HF} = \overline{FD}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\overline{HF}^2\cdot \sin 100° = \cancel{9.254'165'783\ldots}$$
$$= 173.921'426\ldots \cong \cancel{9.254\,cm^2}$$
$$= \underline{173.921\,cm^2} \cong \cancel{9.25\,cm^2}$$