Lösungen

1. Trigonometrie

1a) 0.242, 0.605, … b) 0.998, 0.150, … c) 0.424, -2.450, …
d) 53.13°, 18.06°… e) 60°, 39.65°, … f) 11.31°, 63.43°, …

2a) 0.707, 0.866, … b) 0.866, 0, … c) 0.577, error, …

3a) 45° b) 150° c) 57.30° d) 30.94° e) 332.89° f) 1145.92°

4a) 1.75 b) 7.75 c) 0.17 d) 12.34 e) 15.71

1

5. $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, $-\infty < \tan\alpha < +\infty$

6.

	a) 0°	b) 30°	c) 45°	d) 60°	e) 90°	f) 180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	---	0

7a) 5.99° b) 19.91° c) 37.80° d) 47.35° e) 48.43°

8a) 3.08° b) 28.08° c) 77.76° d) 82.27° e) 89.40°

2

	a	b	c	α (in °)	β (in °)
9a)	--	--	29	43.60	46.40
b)	--	105	--	39.97	50.03
c)	--	14.30	18.67	--	50
d)	1.21	--	5.93	11.8	--
e)	22.18	24.03	--	42.7	--
f)	7.10	2.94	--	67.5	22.5
10a)	16.47	--	24.77	41.67	48.33
b)	6.64	15.13	16.52	--	66.3
c)	50.48	75.72	91	33.69	56.31
d)	--	33.24	35.51	20.61	69.39
e)	14.62	40.85	43.39	19.7	--
f)	16.53	10.9	19.80	56.60	33.40
11a)	--	26.83	38.64	46.01	43.99
b)	6.71	4.47	8.06	56.31	33.69
c)	30	12.5	32.5	67.38	22.62
d)	15	20	25	36.87	53.13

12a) $w_\alpha \approx 70.97$, $w_\beta \approx 29.49$
b) 225.15 bzw. 25.16
c) 23.58
d) 219.69
e) 15.51
f) 18.92

13a) $\beta \approx 73.74°$, $\gamma \approx 32.52°$
b) $a \approx 16.52$, $\gamma = 54°$
c) $c \approx 11.62$, $\beta \approx 81.71°$, $\gamma \approx 16.58°$
d) $a \approx 9.51$, $\beta \approx 67.16°$, $\gamma \approx 45.68°$
e) $a \approx 44.01$, $c \approx 37.89$, $\beta = 64.5°$
f) $a \approx 65.04$, $c \approx 62.26$, $\beta = 61.4°$

3

14. $w_\beta \approx 77.14$

15. 63.78°

16. 110.01° bzw. 69.99°

17. 9.75 bzw. 5.74

18a) $c \approx 16.34$, $h \approx 8.14$
b) $a \approx 154.17$, $\alpha \approx 16.18°$
c) $h \approx 26.43$, $\alpha \approx 78.25°$
d) $a \approx 38.37$, $b \approx 14.76$

19. 85.71°

20a) 54.74°
b) 45° bzw. 90°
c) 35.26°

4

21. 52.13° 22. 2.00 23a) 97.18° b) 162.36° 24. $A\approx1.72$, $d\approx1.62$

4

25a) 1220.21
b) 1275.34

26a) 30.67
b) 28.67
c) 95.46

27. 16.76
28. 674.10
29. 43.72

30. 4.00
31. $\varepsilon\approx35.26°$, $x\approx0.41$

5

32. $\varepsilon=30°$, $x=\sqrt{3}$ 33. 36.87° 34. 11.44

6

35a) (3/90°) d) (7.07/45°) g) (7.62/113.20°)
b) (7/0°) e) (8/120°) h) (10/233.13°)
c) (4/180°) f) (13/292.62°) i) (25/106.26°)

36a) (5/0) d) (-2/3.46) g) (0.21/-1.99)
b) (0/-3) e) (-1.5/-2.60) h) (-1.46/-6.85)
c) (-4/-4) f) (-1.12/4.87) i) (14.49/-3.88)

37a) 35 m
b) 22°

38a) $\beta\approx31.60°$; $\delta=\alpha$
b) 41 mm

39. 512 m
40. 41 m

41a) rund 10°
b) rund 1100 km

7

42. Folgerung aus der Definition der trigonometrischen Funktionen

43a) 11.54°, 168.46° e) 87.27°, 267.27° i) 15.66°, 164.34°
b) 227.73°, 312.27° f) 152.98°, 332.98° k) 50.19°, 230.19°
c) 32.86°, 327.14° g) 154.16°, 205.84° l) 89.83°, 270.17°
d) 92.87°, 267.13° h) 116.57°, 296.57° m) 184.01°, 355.99°

44a) $b\approx20.03$, $c\approx26.05$, $\gamma=95°$
b) $a\approx6.64$, $c\approx5.17$, $\beta=87°$
c) $a\approx11.69$, $b\approx2.03$, $\alpha=76{,}5°$
d) $b\approx273.94$, $c\approx308.09$, $\beta=46°$

45a) $c\approx34.36$, $\alpha\approx34.02°$, $\gamma\approx73.98°$
b) $a\approx11.91$, $\alpha\approx87.81°$, $\gamma\approx40.89°$
c) 1. $b\approx76.49$, $\alpha\approx20.20°$, $\beta\approx141.90°$
2. $b\approx4.97$, $\alpha\approx159.80°$, $\beta\approx2.30°$
d) unlösbar (kein Dreieck)

46a) $c\approx8.26$, $\alpha\approx69.24°$, $\beta\approx35.76°$
b) $b\approx7.74$, $\alpha\approx81.70°$, $\gamma\approx47.00°$
c) $a\approx79.12$, $\beta\approx48.93°$, $\gamma\approx21.77°$
d) $b\approx70.99$, $\alpha\approx3.51°$, $\gamma\approx0.19°$

47a) $\alpha\approx44.41°$, $\beta\approx57.12°$, $\gamma\approx78.46°$
b) $\alpha\approx37{,}18°$, $\beta\approx93{,}18°$, $\gamma\approx49.64°$
c) $\alpha\approx33.82°$, $\beta\approx93.35°$, $\gamma\approx52.84°$
d) unlösbar (kein Dreieck)

48a) $r\approx9.05$, $A\approx94.87$
b) $r\approx20.50$, $A\approx384.94$

49. $\alpha\approx81.54°$, $\beta\approx17.17°$; $\gamma\approx81.30°$

50. $\alpha\approx33.20°$, $\beta\approx87.80°$, $b\approx41.97$, $c\approx36.00$

8

51a) 5.57
b) 55.43
c) 14.94
d) 94.49

52. 71.89

53. $h_a\approx8.65$; $s_a\approx11.12$; $w_\alpha\approx10.50$

54a) $\sqrt[3]{2}\approx1.2599$
b) $k_3\approx1.2593$; $k_4\approx1.2605$

55a) $h_a\approx16.73$, $h_b\approx11.81$, $h_c\approx10.57$
b) $h_a\approx44.80$, $h_b\approx104.84$, $h_c\approx38.41$

56a) 57.69°
b) 4.73

9

57. 8.15 58. 19.97°, 160.03° 59. $e\approx61.48$; $f\approx33.17$

9

60a) $b\approx33.19$, $f\approx48.48$, $\beta\approx50.28°$
b) $a\approx57.97$, $d\approx22.27$, $f\approx45.78$
c) $a\approx20.26$, $f\approx14.79$, $\alpha=37°$
d) $a\approx28.64$, $c\approx20.43$, $\beta=70°$

61. 44.69

62a) 38.50
b) 20.43°

63. 7.18

64a) 1.52
b) 2.23

10

65. 3.70 (Radien 3, 6 und 7) 66. $x\approx3.59$, $y\approx4.96$ 67. 12.75

68. $\alpha\approx57{,}43°$, $\beta\approx86{,}82°$, $\gamma\approx35{,}75°$ (Hilfe: Schwerpunktsatz)

69. $\beta=30°$, $\gamma=105°$ (Hilfe: ähnliche Dreiecke) 70. 56 m 71. 169 m

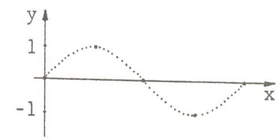
11

72. 228 m 73. 583 m 74. 408 m 75. 154 km

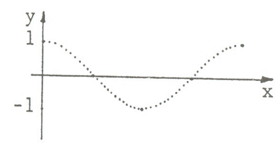
76. 36 sm, d.h. 67 km 77a) 12 km b) N65W 78. 17.8 sm, d.h. 33 km 79. 478 km/h; N34E

12

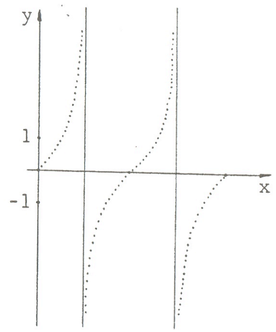
80a)



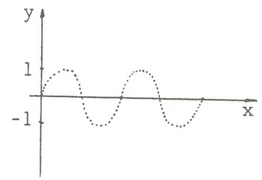
80b)



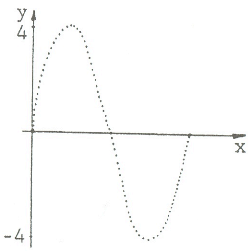
80c)



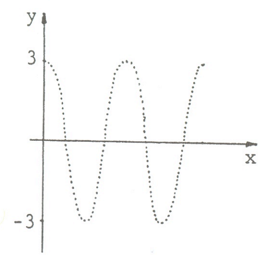
81a)



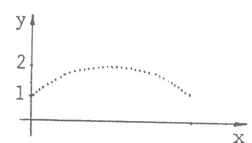
81b)



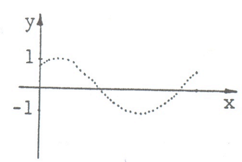
81c)



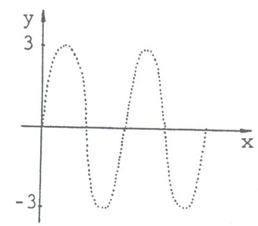
81d)



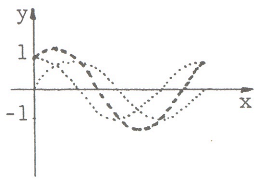
82a)



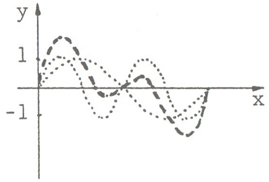
82b)



83a)



83b)



12

84a) $\pi/2,\ 3\pi/2$
b) $0,\ \pi/3,\ 2\pi/3, \dots, 2\pi$
c) $3\pi/2$
d) $0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$
e) $0,\ \pi,\ 2\pi$
f) $\pi/2,\ 3\pi/4,\ 3\pi/2,\ 7\pi/4$

85a) $2\pi/5$
b) $2\pi/9$
c) $\pi/8$
d) $8\pi/3$
e) 3π
f) 4π

86a) $[-1, 1]$
b) $[-2, 2]$
c) $(-\infty, +\infty)$
d) $[-1, 1]$
e) $[-1, 1]$
f) $(-\infty, +\infty)$

13

87a) $\pi < x < 2\pi$
b) $0 \le x < \pi/3 \ \vee\ 5\pi/3 < x \le 2\pi$
c) $0 \le x < \pi/4 \ \vee\ \pi/2 < x < 5\pi/4 \ \vee\ 3\pi/2 < x \le 2\pi$
d) $\pi/4 < x < 7\pi/4$
e) $\pi/3 < x < \pi/2 \ \vee\ 4\pi/3 < x < 3\pi/2$
f) $\pi/4 < x < 3\pi/4$

88. -
89a) $\cos\alpha$
b) $1/\tan\alpha$
c) $\sin\alpha$
d) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

90a) $\cos\alpha = 0.96$, $\tan\alpha = 7/24$
b) $\sin\alpha = 5/13$, $\tan\alpha = 5/12$
c) $\sin\alpha = 0.6$, $\cos\alpha = 0.8$
d) $\cos\alpha = 8/17$, $\tan\alpha = 15/8$
e) $\sin\alpha = 20/101$, $\tan\alpha = 20/99$
f) $\sin\alpha = 35/37$, $\cos\alpha = 12/37$

91a) $\sin(\alpha+\beta) = 156/205$, $\sin((\alpha-\beta) = 84/205$, $\cos(\alpha+\beta) = 133/205$,
$\cos(\alpha-\beta) = 187/205$, $\tan(\alpha+\beta) = 156/133$, $\tan(\alpha-\beta) = 84/187$
b) $\sin(\alpha+\beta) = 171/221$, $\sin(\alpha-\beta) = -21/221$, $\cos(\alpha+\beta) = -140/221$,
$\cos(\alpha-\beta) = 220/221$, $\tan(\alpha+\beta) = -171/140$, $\tan(\alpha-\beta) = -21/220$

92. Anwendung der Additionstheoreme

93a) $2\sin\alpha\cdot\cos\beta$
b) $2\cos\alpha\cdot\sin\beta$
c) $1+\tan\alpha\cdot\tan\beta$
d) $1-\tan^2\alpha$
e) $2\sin^2\alpha$
f) 2
g) $\sin\alpha$
h) $\cos\alpha$

14

94a) ± 0.96
b) -0.02
c) -0.75
d) 0.296
e) 0.8432
f) $\sqrt{3}/2$

95a) $-3 \le a \le 3$
b) $-1 \le a \le 7$
c) $a \ge 5 \vee a \le -5$
d) $a \ge -0.5$
e) $-1.25 \le a \le 1.25$
f) $a \ge 0.2 \vee a \le -1$

96a) 47.05°, 112.95°
b) 180°, 198°
c) 71.74°, 251.74°
d) 30.21°, 113.79°
e) 56.58°, 146.58°, 236.58°, 326.58°
f) 74.21°, 351.79°

14

97a) 45°, 135°, 225°, 315°
b) 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°
c) 45°, 225°
d) 153°, 333°
e) 7.5°, 187.5°
f) 122°, 302°

98a) 45°, 225°
b) 0°, 90°, 180°, 270°
c) 0°, 180°
99a) 34.99°, 214.99°
b) 71.57°, 251.57°
c) 54.46°, 234.46°

100a) 0°, 180°
b) 0°, 180°
c) 0°, 45°, 180°, 225°
d) 0°, 30°, 150°, 180°

Aufgaben 101 bis 106: quadratische Gleichungen

101a) 120°, 240°
b) 30°, 150°

102a) 68.53°, 291.47°
b) 90°, 270°
c) 0°, 90°, 180°,270°
d) 45°, 90°, 135°, 225°, 270°, 315°

103a) 30°, 150°, 210°, 330°
b) 0°, 54.74°, 125.26°, 180°, 234.74°, 305.26°

104a) 60°, 180°, 300°
b) 45°, 123.69°, 225°, 303.69°
c) { }
d) 70.53°, 289.47°

105a) 39.23°, 140.77°, 219.23°, 320.77°
b) 30°, 150°, 210°, 330°
106a) 90°
b) 270°

15

107. $A \approx 47.90$, $u \approx 31.65$
108. $A \approx 89.83$

109a) $u \approx 64.87$
b) 57.93° bzw. 230.07°

110a) 55.77°
b) $A \approx 7.91$

111a) 20.02
b) 329.89 (Hinweis: Zerlegung in Dreieck und Kreissektor)

16

112a) $\overline{AD} = 4$, $\overline{AS} \approx 7.16$, $\overline{DS} \approx 6.45$; Winkel 63.43°, 33.40°, 83.17°
b) $A = 12.8$, d.h. genau 40% der Rechtecksfläche

113. $\overline{EM} \approx$ 366'094 km (Hinweis: Dreieck BEK zuerst berechnen; $\overline{BK} \approx$ 8724 km)

2. Schiefe Parallelprojektion

Zu jeder Aufgabe ist die Lösungsfigur zum Teil a) dargestellt.

17

1a) $S_1(2/4/0)$, $S_2(0/5/-1)$, $S_3(10/0/4)$; ☞ Figur 1, Seite 64
b) $S_1(8/-3/0)$, $S_2\ (0/9/4)$, $S_3(6/0/1)$
c) $S_1(-2/3/0)$, $S_2\ (0/2/1)$, $S_3(4/0/3)$

2a) $S_1(-2/10/0)$, $S_2(0/8/1)$, $S_3(8/0/5)$; sichtbar $\overline{S_2S_3}$; ☞ Figur 2
b) $S_1(6/3/0)$, $S_2(0/5/2)$, $S_3(15/0/-3)$; sichtbar $\overline{S_1S_2}$

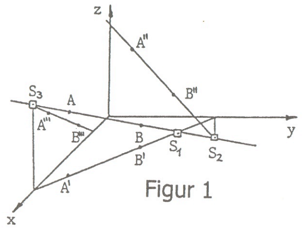
3a) $\overline{AB}$ sichtbar; Parallele: $S_1(\ 3/2/0)$, $S_2(0/3/3)$, sichtbar $\overline{S_1S_2}$; ☞ Figur 3
b) AB: $S_1(4/6/0)$, $S_3\ (2/0/4)$; sichtbar $\overline{S_1S_3}$
Parallele: $T_1(7/3/0)$, $T_3(6/0/2)$; sichtbar $\overline{T_1T_3}$

17

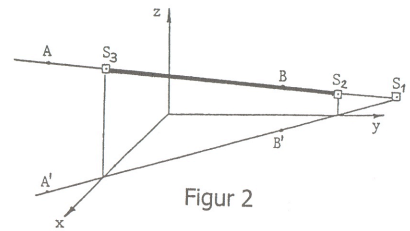
4a) $S_1(4/4/0)$ auf AC; $T_1(6/6/0)$ auf AB; sichtbar $S_1T_1BCS_1$; ☞ Figur 4

b) $S_1(8/2/0)$, $S_3(7/0/2)$ auf AB; $T_1(6/6/0)$ auf BC; $U_3(5/0/4)$ auf AC; sichtbar $S_3S_1T_1CU_3S_3$

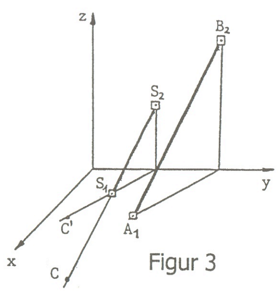
c) $S_1(4/3/0)$ und $S_3(3/0/2)$ auf AB; $T_3(1/0/2)$ und $T_{12}(0/3/0)$ auf BC; $U_3(5/0/4)$ auf AC; sichtbar $S_1S_3T_3T_{12}S_1$



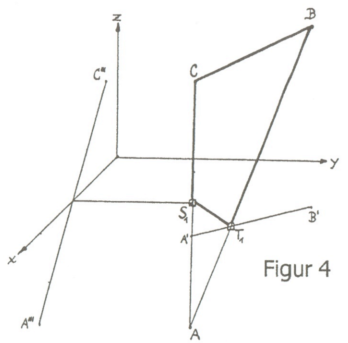
Figur 1



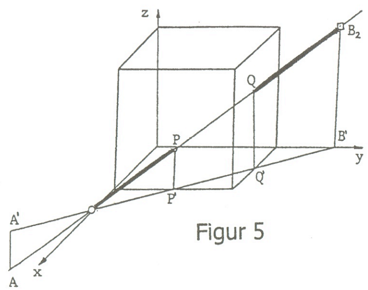
Figur 2



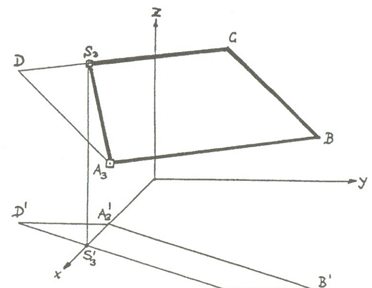
Figur 3



Figur 4



Figur 5



Figur 6

18

5a) AB: $S_{13}(9/0/0)$, $B=S_2$; Schnittpunkte P(6/3/2), Q(3/6/4); ☞ Figur 5 (oben)

b) AB: $S_2(0/5/8)$, $S_3(10/0/3)$; Schnittpunkte P(6/2/5), Q(4/3/6); Seitenriss verwenden

c) AB: S_1 (4/9/0), $B=S_3$; Schnittpunkte P(3/6/3), Q(2/3/6);Aufriss oder Seitenriss verwenden

6a) D(4/-3/5); $S_3(6/0/6)$ auf $\overline{CD}$; sichtbar Viereck $ABCS_3$ ☞ Figur 6 (oben)

b) D(5/3/3); $S_1(6/10/0)$ auf $\overline{AB}$, $T_2(0/8/5)$ auf $\overline{BC}$, $U_2(0/6/5.5)$ auf $\overline{CD}$, $V_1(8/4/0)$ auf $\overline{AD}$; sichtbar Sechseck $BT_2U_2DV_1S_1$

7. Es sind jeweils die Achsenabschnitte angegeben.

a) x=12, y=9, z=6; ☞ Figur 7
b) x=6, y=4, z= - 6
c) x=14, y=7, (z=42)
d) z=4; 1.Hauptebene
e) x=12, z=6; 3.projizierende Ebene
f) x=4, (y= - 4), z=2
g) (x=24), y=8, z=6
h) x=4, y=4, (z= - 2); Hilfspunkt nötig
i) x=8, (y=40), z=5; Hilfspunkt nötig

8a) ABC: Abschnitte x=12, y=6, z=3; DEF: Abschnitte x=6, y=3, z=6
Schnittgerade S_1S_2 mit $S_1(4/0/2)$, $S_2(0/2/2)$; ☞ Figur 8

b) ABC: x=12, y=9, z=6; DEF: x=2, y=4, (z= - 4)
Schnittgerade S_2S_3 mit $S_2(0/6/2)$, $S_3(4/0/4)$

c) ABC: x=12, y=6 (1.projizierend); DEF: y=4, z=6 (2.projizierend)
Schnittgerade S_1S_3 mit $S_1(4/4/0)$, $S_3(12/0/6)$

d) ABC: z=3 (1.Hauptebene); DEF: (x= -6), y=6, z=2
Schnittgerade S_2S_3 mit $S_2(0/-3/3)$, $S_3(3/0/3)$

19

9a) ABC: x=12, y=8, z=6; PQ: sichtbar QS mit S(3/2/3); ☞ Figur 9 (unten)

b) ABC: y=8, z=4 (2.projizierend); PQ: sichtbar S_3S mit $S_3(4/0/6)$, S(8/4/2)

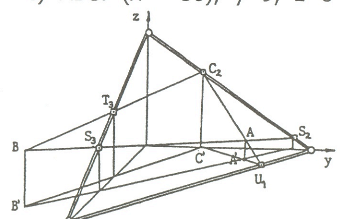
c) ABC: x=12, (y=24), z=4; PQ: sichtbar S_3S mit $S_3(6/0/9)$, S(2/2/3)

d) ABC: x=8, y=3, (z= - 12); PQ: sichtbar von $S_2(0/5,5/1)$ an (bis S_3)

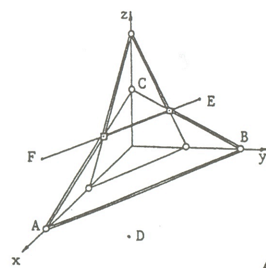
e) ABC: z=3 (1.Hauptebene); PQ: sichtbar S_3S mit $S_3(6/0/5)$, S(2/8/3)

10. ☞ Figuren 10a), b), c), d)

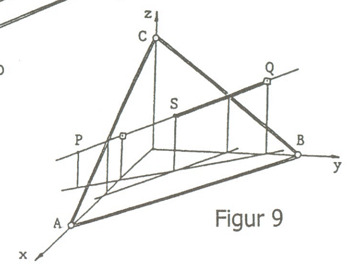
a) ABC: x=10, y=8, z=9
b) ABC: x=8, (y= - 10), z=4
c) ABC: (x= - 36), y=9, z=8
d) ABC: (x=30), y=10, z=8



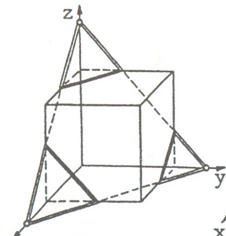
Figur 7



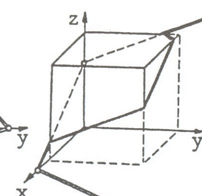
Figur 8



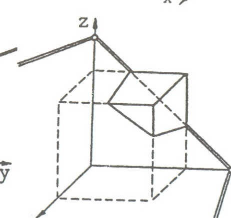
Figur 9



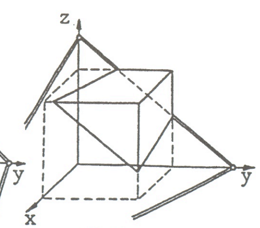
10a)



10b)

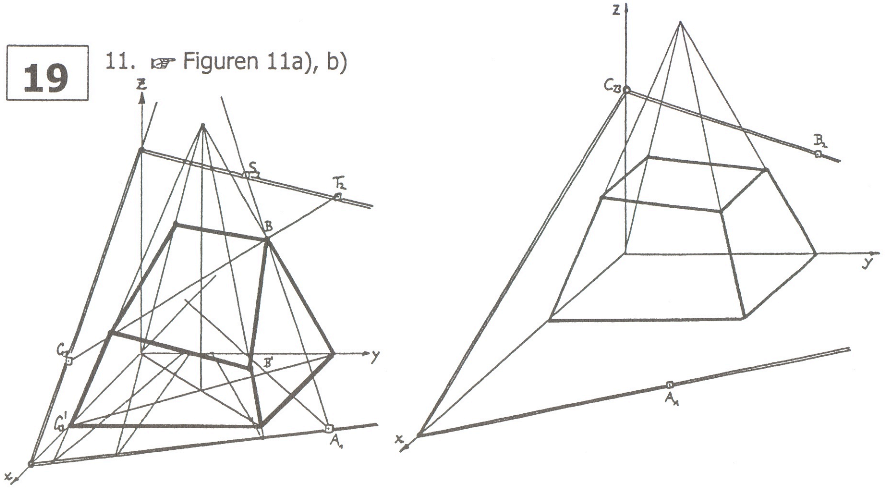


10c)



10d)

19 11. ☞ Figuren 11a), b)



3. Elementare Vektoroperationen

20

1. ---
2. --

3a) $c \approx 2.6\text{cm}$ b) $d \approx 7.6\text{cm}$ c) $e \approx 4.0\text{cm}$

4a) $u \approx 10.0\text{cm}$ b) $v \approx 3.2\text{cm}$ c) $w \approx 4.3\text{cm}$

5a) $1.6(\vec{b}-\vec{c})$ b) $^1/_3(13\vec{b}-\vec{c})$ c) $^{16}/_3(\vec{b}-2\vec{c})$

6. $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{c}$; $\overrightarrow{AD} = ½\,\vec{c}$; $\overrightarrow{CD} = -(\vec{a}+½\,\vec{c})$

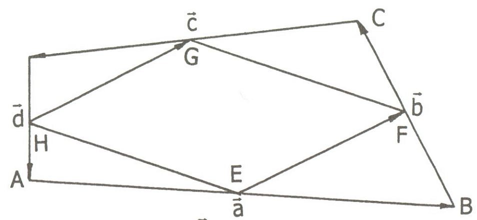
7a) $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BE} = ½(\vec{b}-\vec{a})$; $\overrightarrow{EC} = ½(\vec{a}+\vec{b})$
b) $\overrightarrow{AB} = ½(\vec{e}-\vec{f})$; $\overrightarrow{AD} = ½(\vec{e}+\vec{f}) = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BE} = ½\vec{f}$; $\overrightarrow{EC} = ½\vec{e}$

21 8. $\overrightarrow{AE} = ½\,\vec{a}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{b}-\vec{a}$; $\overrightarrow{CD} = -\vec{a}$; $\overrightarrow{DE} = ½\,\vec{a}-\vec{b}$;
$\overrightarrow{BF} = {}^3/_5\,\vec{b}$; $\overrightarrow{AF} = \vec{a}+{}^3/_5\,\vec{b}$; $\overrightarrow{EF} = ½\,\vec{a}+{}^3/_5\,\vec{b}$

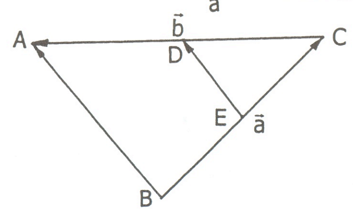
9. $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{BG} = \vec{b}+\vec{c}$; $\overrightarrow{AF} = \vec{a}+\vec{c}$; $\overrightarrow{EC} = \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$;
$\overrightarrow{AG} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; $\overrightarrow{HF} = \vec{a}-\vec{b}$

10. $\overrightarrow{CE} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; $\overrightarrow{FD} = \vec{b}-\vec{a}-\vec{c}$; $\overrightarrow{CI} = ½\,\vec{a}+½\,\vec{b}+\vec{c}$;
$\overrightarrow{BK} = ½\,\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; $\overrightarrow{IK} = ½\,\vec{b}-\vec{c}$

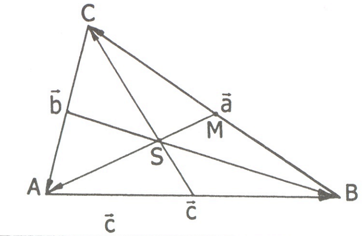
11a) $\vec{d} = -(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$
b) $\overrightarrow{EF} = ½(\vec{a}+\vec{b})$;
$\overrightarrow{HG} = -½(\vec{d}+\vec{c}) = ½(\vec{a}+\vec{b})$
Also: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$



12. $\overrightarrow{BA} = \vec{a}+\vec{b}$
$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD} = ½\,\vec{a}+½\,\vec{b}$
Also: $\overrightarrow{ED} = ½\,\overrightarrow{BA}$

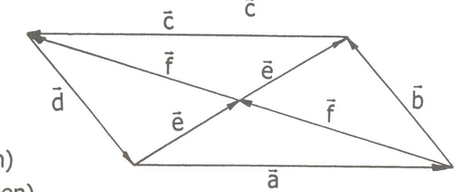


13. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$
$\overrightarrow{SA} = {}^2/_3\,\overrightarrow{MA} = {}^2/_3\,(\vec{b}+½\,\vec{a})$
$\overrightarrow{SB} = {}^2/_3(\vec{c}+½\,\vec{b})$
$\overrightarrow{SC} = {}^2/_3(\vec{a}+½\,\vec{c})$
$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$



21

14. $\vec{a}+\vec{f}-\vec{e} = \vec{0}$
$\vec{c}-\vec{f}+\vec{e} = \vec{0}$
$\vec{a}+\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = -\vec{c}$



15. $\vec{m} = -½\,\vec{d}+\vec{a}+½\,\vec{b}$ (unten)
$\vec{m} = ½\,\vec{d}+\vec{c}-½\,\vec{b}$ (oben)
Also: $2\vec{m} = \vec{a}+\vec{c}$

4. Vektoren im Koordinatensystem

22

1a) P'(5/2/-1) b) P'(5/-2/1) c) P'(5/-2/-1) d) P'(-5/-2/1) e) P'(-5/-2/-1) f) P'(3/6/7)

2a) auf x-Achse b) in xy-Ebene c) in xz-Ebene d) Gerade z=4 ∥ y-Achse, in yz-Ebene e) Ebene x=3 ∥ yz-Ebene f) Ebene y=2 ∥ xz-Ebene g) Gerade ∥ x-Achse, 1./2.Oktant h) Gerade y=z in yz-Ebene

3a) - b) $\begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix}$

4a) - b) $\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$

23

5a) $\begin{pmatrix}9\\20\\-13\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}178\\60\\9\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}69\\-1\\8\end{pmatrix}$

6a) nein b) ja c) ja d) nein

7a) x=12, z = -32 b) y = 0, z = $^2/_3$ c) x = -1.25, y = 11.2 d) $\vec{a}$, $\vec{b}$ *nicht* kollinear

8a) x= - 2.5 b) y=12

9. x= - 5.5, y=11.5

10a) ja b) nein

11. nein

12a) D(-2/1) b) D(-5/18) c) D(-4/4/1) d) D(14/8/-8)

13. D_1(-2/-1/-12), D_2(6/-5/-2), D_3(0/9/12)

14. ja

15a) C(-6/7/11), D(0/-1/7) b) C(4/-13/7), D(7/-6/0)

24

16a) $2\vec{a}+\vec{b}$ b) $½\vec{a}+2\vec{b}$ c) $-2\vec{a}-\vec{b}$ d) $-1.5\vec{a}+3\vec{b}$

17a) $4\vec{a}-7\vec{b}+\vec{c}$ b) $-\vec{a}-4\vec{b}-2\vec{c}$ c) $3\vec{a}-\vec{b}$ d) $3\vec{a}+\vec{b}-4\vec{c}$ e) $-3\vec{a}+\vec{c}$ f) $7\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$

18. a=9; $\begin{pmatrix}-7.5\\15\\15\end{pmatrix}$

25

19. a=25; $\begin{pmatrix}-19.2\\32\\-14.4\end{pmatrix}$

20a) 48 b) 84 c) 40 d) 32

25

21. $B_1(6/5/-3)$, $B_2\ (6/-3/-3)$
22. $P_1(0/0/5)$, $P_2(0/0/9)$
23. $P_1(8/0/0)$, $P_2(-4/0/0)$
24. $x_1 = 6$, $y_1 = -2$; $x_2 = 2$, $y_2 = -6$
25. $y_1 = 6$, $z_1 = -3$; $y_2 = -3$, $z_2 = 6$
26. P(3/0)

27a) P(0/-3/0)
b) P(0/17/0)
c) P(0/0/2)

28a) $P_1(4/0/0)$, $P_2(12/0/0)$
b) $P_1(0/-3/0)$, $P_2(0/3\frac{1}{2}/0)$
c) $P_1(0/0/7)$, $P_2(0/0/6\frac{1}{2})$

29a) S(1/3)
b) S(3/-2/2)

26

30a) C(-2/5/-3); $4\frac{1}{2}$
b) C(3/4/-2); $4\frac{1}{2}$

31a) P(0.5/0/0)
b) P(0/4/5)

32a) ja
b) Q(10/18/0)
c) K(0/6/5)
d) P(0/0/1)
e) P(4/6/0)

33. $A_1(0/10/0)$, $C_1(7/11/20)$; $A_2(7/11/0)$, $C_2(0/10/20)$

5. Das Skalarprodukt

27

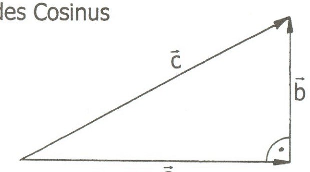
1a) 14
b) -3
c) 12
d) 0

2a) 60°
b) 94.10°
c) 90°
d) 180°
e) 120°
f) 67.98°

3a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cdot\cos\varphi = ba\cdot\cos\varphi = \vec{b}\cdot\vec{a}$
b) $k(\vec{a}\cdot\vec{b}) = kab\cdot\cos\varphi = (ka)b\cdot\cos\varphi = $
$= (k\vec{a})\cdot\vec{b} = (ak)b\cdot\cos\varphi = \vec{a}\cdot(k\vec{b})$
c) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = a(b_a + c_a) = ab_a + ac_a =$
$= \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

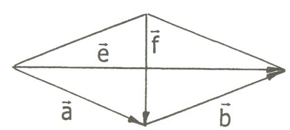
4. Folgt aus der Definition des Skalarprodukts bzw. des Cosinus

5a) 0° b) 180° c) 60° d) 120°



6a) $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$ quadrieren;
$2\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow$ Pythagoras

b) Diagonalen $\vec{e} = \vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{f} = \vec{a}-\vec{b}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = a^2 - b^2 = 0$,
da a = b.
Also $\vec{e}\cdot\vec{f} = 0$, d.h. $\measuredangle(\vec{e},\vec{f}) = 90°$



7a) 60°
b) 60°
c) 60°
d) 75.52°
e) 123.75°
f) 120°
g) 131.81°
h) 120°
i) 104.48°

28

8a) -2
b) -56
c) 5
d) -2

9a) -7
b) -6
c) 77
d) -114
e) -77

10a) 59.49°
b) 61.93°

11a) 13.46°
b) 34.00°

12a) 68.26°
b) 86.08°

29

13a) 62.75°, 68.45°, 48.80° b) 39.63°, 90°, 50.37°

29

14a) 36.87°, 126.87°
b) 29.21°, 115.88°, 77.40°
c) 144.46°, 90°, 54.46°

15. $z = \pm 1$
16. $y = \pm 2$

17a) 11
b) $u_1 = 4$, $u_2 = -2$

18a) $P_1(0/2/0)$, $P_2(0/5/0)$
b) $P_1(4/0/0)$, $P_2(-2/0/0)$
c) $P_1(0/0/4)$, $P_2(0/0/10)$
d) $P_1(4/0/0)$, $P_2(-1/0/0)$

19. P(0/6/12); $\overline{EP} = 14$

20. $A_1 = 49$ mit $x_1 = -3$ und $z_1 = 3$;
$A_2 = 42.25$ mit $x_2 = z_2 = 1.5$

6. Die Gerade

30

1a) $3x - y - 5 = 0$
b) $2x - 7y + 11 = 0$
c) $6x + 5y - 20 = 0$
d) $x + 3 = 0$
e) $y + 5 = 0$

2a) ja
b) ja

3. P ja, Q nein

4a) $5x - 2y - 30 = 0$
b) $3x + y - 7 = 0$

5a) $12x - 8y + 5 = 0$
b) $8x - 12y + 21 = 0$
c) $x - 3y - 5 = 0$

31

6a) S(-1/-11) ; 5.91°
b) S(-3/0) ; 71.57°
c) S(6/3) ; 90°
d) S(-4/-8) ; 43.60°
e) S(6/7) ; 75.96°
f) $g \parallel h$

7. $m_1 = -2$,
$m_2 = \frac{1}{2}$

8a) P(3.75/4.5)
b) 82.87°
c) 6.75

9a) S(4/6)
b) 82.87°
c) 32

10a,b) $m_g \cdot m_h = -1$
c) $\vec{a}_g \cdot \vec{a}_h = 0$

11a) H(6/8)
b) H(1/1)

12a) P'(0/5)
b) P'(8/-3)
c) P'(10/5)
d) P'(-6/-8)

13a) $3x - y - 13 = 0$
b) $2x + 29y - 12 = 0$
c) $45x + 265y - 787 = 0$

32

14a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

17. A ja, B nein, C ja

18a) g auf z-Achse
b) $g \parallel$ x-Achse, in xz-Ebene
c) g in xy-Ebene
d) $g \parallel$ yz-Ebene

19a) $S_1(1/5/0)$, $S_2(0/7/-3)$, $S_3(3.5/0/7.5)$
b) $S_1(9/1/0)$, $S_2(0/-3.5/13.5)$, $S_3(7/0/3)$

20. $S_a(-0.8/3.6/0)$, $S_b(2.5/15/0)$, $S_c(-3/-4/0)$

21. $T_1(-1/3/0)$, $T_2(2/1/2)$

22. ja

33

23a) windschief
b) parallel
c) zusammenfallend
d) sich schneidend in S(6/4/7)
e) parallel
f) sich schneidend in S(0/0/-3)
g) windschief

24a) S(0/0/7), 90° b) S(0/8/15), 65.44° c) S(33/44/55), 63.72°

34

25a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, S(1/10/-7)

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix}$, S(-4/9/-1)

26a) C_1(-1/1/2), C_2(-1/1/8) b) C(-1/1/30.75)

27a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) 31.32° c) P($5^5/_7$/$5^5/_7$/10)

28. P(2/2/4), 90° 29. P(5/1/4) sowie D selbst

30. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

7. Die Ebene

35

1a) 3x + y - z - 6 = 0
b) 2x - 3y + z - 12 = 0
c) 3x - 4y + 5z - 6 = 0
d) 4x + 21y - 28z - 105 = 0
e) 34x - 7y + 67z - 232 = 0
f) 135x - 95y + 164z - 836 = 0

2a) x - 2y - 3z - 4 = 0
b) 5x - y + 2z - 4 = 0

3. 3x + 2y + z - 7 = 0

4a) x + 7y - 4z + 19 = 0
b) 6x - y + 2z - 20 = 0

5a) 2x + z - 3 = 0
b) 3y - 5z + 8 = 0
c) 2x - 7y - 12 = 0

6a) x - 5 = 0
b) 2y + 5 = 0
c) z - 8 = 0

7a) E ∥ z-Achse (1.projizierend)
b) E ∥ x-Achse (2.projizierend)
c) E ∥ yz-Ebene (2. Hauptebene)
d) E durch y-Achse (3.projizierend)

36

8a) 3x - 2y + z -10 = 0 ; S(0/-4/2) b) 8x + 12y - 3z - 16 = 0 ; S(2/1/4)

9a) a = 2, b = - 6, c = 3
b) a = - 9, b = - 4, c = 12
c) a = - 20, c = 12
d) b = $^4/_7$, c = - 1

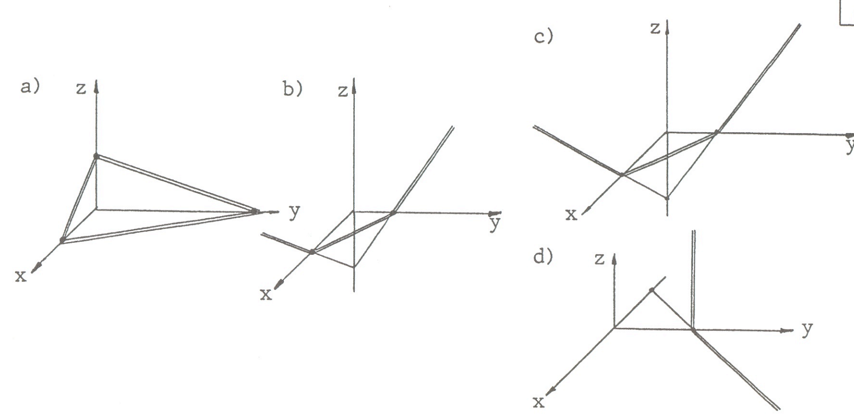
10a) a = 6, b = 12, c = 4
b) a = 10, b = 4, c = - 5
c) a = 9, b = 4 ½ , c = - 6
d) a = - 6, b = 5

Schrägbilder zu Aufgabe 10: auf Seite 71

11. bcx + acy + abz - abc = 0 bzw. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (Achsenabschnittsform der Ebenengleichung)

Schrägbilder zu Aufgabe 10

36



12a) 3x + 2y + 2z - 6 = 0
b) 3x - 4y + 24z - 24 = 0
c) 5x - 9y - 15z + 45 = 0
d) 3x + 3y - 7z + 42 = 0
e) 7x + 5y + 35 = 0
f) x - 7 = 0

13a) b = 6, c = - 2
b) b_1 = 4.8, c_1 = 3;
b_2 = -3, c_2 = -4.8

37

14a) s_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
s_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
s_3: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) s_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
s_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$,
s_3: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

15a) 2x + 3y + 4z - 12 = 0
b) 5x - 8y + 10z - 40 = 0
c) 30x + 7y + 35z - 210 = 0
d) 5x + 9z - 45 = 0
e) z - 3 = 0
f) 4x + 10y + 15z - 60 = 0
g) 3x + 4y + 12z - 60 = 0
h) x + 3y + 3z - 15 = 0

38

16a) A ja, B nein
b) A ja, B ja

17a) P(0/0/-4)
b) P(0.4/0.4/0.4)
c) P(-3/4/5)
d) P(1/1/7)

18. ja (E: 28x - 29y - 11z + 83 = 0) 19. S(4/4/4) 20. c = ± 9

21a) D(2/-1/2)
b) D(4/0/0)
c) g ∥ E
d) D(3/3/3)

22a) D(0/3/-1)
b) D(1/-2/-3)
c) g ∈ E
d) D(0/-1/-1)

39

23a) 3x + 2z - 12 = 0 b) gleichschenkliges Trapez, A ≈ 16.22

39 24a) s: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ b) s: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

c) s: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix}$ d) s: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$

25. b = 3, c = 5

8. Normalenformen

40
1a) $2x - y + 6z - 2 = 0$
b) $7x + 2y - 2z - 8 = 0$
c) $3x + z - 12 = 0$

2a) $x + 3y - 2z + 6 = 0$
b) $2x - 5z - 30 = 0$
c) $3x + 6y - 2z - 8 = 0$

3a) $4x - y - 3z + 18 = 0$
b) $5x - y - 4z + 32 = 0$

4. d = 11

5a) P(0/1/-4) b) P(1/0/3)

6. h: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$

7. D(1/-1/3); A = 27

41
8a) $3x - 4y - 10z + 9 = 0$
b) $29x - 38y - 7z - 51 = 0$
c) $x - 3 = 0$

9a) P'(4/1/-4)
b) P'(5/-2/1)
c) P'(11/-6/-15)

10. $4x + 3y - 9z + 10 = 0$

11a) g': $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\-4\\5\end{pmatrix}$ b) g': $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\17\\13\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$

c) g': $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$ d) g': $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\10\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\-3\\-9\end{pmatrix}$; g ∥ E

12. R(2/-2/3) 13. $x + 4y - 3z + 3 = 0$

42 14a) g': $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ b) P(2/2/6)

15a) 64.45°
b) 72.93°
c) 48.00°

16a) 7.66°
b) 0°; g ∥ E

17. S(4/4/2); 36.60°

43
18a) B(4/0/0), D(2.4/-8/-3.2)
b) 24.09° (E: $x - y + 2z - 4 = 0$)

19. u = ± 4

20a) V = 108π
b) V = 243π

21. V = 45π (Grundkreisebene: $10x + 2y - 11z + 5 = 0$; Höhe 15, Radius 3)

22a) y = - 7, z = - 8 b) S_1(7/5.5/-11.5), S_2(-1/-10.5/4.5) **43**

23a) y_c = 16, D(9/12/-4) b) C_1(2/7/9), D_1(9/3/5); C_2(-6/9/-7), D_2(1/5/-11)

24a) β = 90° b) D(1/5/-4) c) h = 36 d) S_1(21/-26/0), S_2(-11/38/8)

44
25a) 2
b) 3
c) 1

26a) 4
b) 2.88
c) 3
d) 14.64

27a) 5
b) 7
c) 4

28. h = 2, ε ≈ 63.43°

29. $4x - 4y - 7z - 21 = 0$; d = 3

45
30a) 4
b) 1
c) 2
d) 3

31a) $11x - 2y + 10z + 30 = 0$, $11x - 2y + 10z - 60 = 0$
b) $24x - 7z + 105 = 0$, $24x - 7z - 95 = 0$
c) $9x + 12y + 8z + 28 = 0$, $9x + 12y + 8z - 40 = 0$

32a) $6x + 2y - 8z + 13 = 0$, $2x - 6y - 7 = 0$
b) $21x - 4y + 11z + 7 = 0$, $9x - 16y - 23z + 11 = 0$
c) $10x + y - 7z - 35 = 0$, $10x - 23y + 11z + 13 = 0$
d) $11x + 22y - 5z - 32 = 0$, $x + 2y + 11z + 20 = 0$

33a) P_1(-1/2/2), P_2(5/-4/2)
b) P_1(3/1/4), P_2(0/-1/6)

34a) d = 2
b) $x_1 = 10$, $x_2 = -24$

35a) P_1(0/0/4), P_2(0/0/-3)
b) P_2

36a) P(24/6/2)
b) d = 18

9. Kreis und Kugel

46
1a) M(17/17), r = 17
b) M(5/7), r = 5
c) M(-20/13), r = 13
d) M(12/0), r = 15

2a) M(4/-3), r = 5
b) M(-1/-6), r = 6
c) M(-7/0), r = 8
d) M(3,5/4), r = 5.5
e) M(2.5/-1.5), r = 3
f) M($-^2/_3$/3), r = $^1/_3$

3a) S_1(0/10), S_2(-8/-6)
b) B(-3/4)
c) S_1(7/2), S_2(0/5)
d) S_1(-11/65), S_2(30/62)

4a) S_1(0/0), S_2(-8/6); d = 5 (Sekante)
b) B(12/5); d = 13 (Tangente)

5. k_1: $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$; k_2: $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 25$

6. k_1: $(x - 2)^2 + (y - 11)^2 = 25$; k_2: $(x + 6)^2 + (y - 17)^2 = 25$

47
7a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0.64$
b) $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 1$

8. P_1(-3/2), P_2(-7/-4)

9. k_1: $(x - 49)^2 + (y + 17)^2 = 2601$
k_2: $(x + 41)^2 + (y - 31)^2 = 2601$

10a) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 26$
b) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 169$

11. $14x + 9y + 3 = 0$

12a) $12x + 5y - 44 = 0$
b) P(7/-8), Q(-3/16); $\overline{PQ}$ = 26

47

13. $k_1: (x-9)^2 + (y-6)^2 = 9$
$k_2: (x+5)^2 + (y-4)^2 = 9$

14. $P_1(11.2/-6.6)$, $P_2(-3.2/12.6)$; $\overline{P_1P_2} = 24$

15. $k_1: (x+9)^2 + (y+5)^2 = 25$
$k_2: (x-11)^2 + (y-5)^2 = 225$

16. $k_1: (x-4)^2 + (y+1)^2 = 100$
$k_2: (x+8)^2 + (y-15)^2 = 100$

17a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 169$
$(x+39)^2 + (y-38)^2 = 2809$
b) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 100$
$(x+13)^2 + (y-20)^2 = 676$

18a) $3x + 4y - 50 = 0$
b) $5x - 12y + 123 = 0$
c) $4x - 15y + 67 = 0$

48

19a) $4x + 3y - 20 = 0, \quad 4x + 3y + 30 = 0$
b) $7x - 24y + 639 = 0, 7x - 24y - 611 = 0$

20a) $B_1(13/8)$, $B_2(-3/-4)$; $4x + 3y - 76 = 0, \quad 4x + 3y + 24 = 0$
b) $B_1(-8/7)$, $B_2(8/-23)$; $8x - 15y + 169 = 0, \quad 8x - 15y - 409 = 0$

21a) $x - 3y + 10 = 0, \quad 3x + y + 10 = 0$
b) Steigungen $^1/_3$ und -3.

22a) $B_1(3/5)$, $B_2(5/-3)$; $3x + 5y - 34 = 0, \quad 5x - 3y - 34 = 0$
b) $M(-2/6)$, $B_1(-4/12)$, $B_2(4/8)$; $x - 3y + 40 = 0, \quad 3x + y - 20 = 0$

23a) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 12$
b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 19$

24a) $M(2/-1/5)$, $r = 2$
b) $M(-6/0/3)$, $r = 6$
c) $M(7/-2/0)$, $r = 0$
d) $M(0.5/-1.5/1)$, $r = 3$
e) $M(-^2/_3 \,/\, ^3/_2 \,/ -^5/_6)$, $r = ^5/_2$

25. $r = 21$

26a) $S_1(4/5/0)$, $S_2(6/-1/2)$
b) $S_1(5/2/0)$, $S_2(3/-4/2)$
c) $S_1(-1/1/6)$, $S_2(-6/-1/1)$
d) $S_{12}(2/2/0)$ (Tangente)

49

27a) $M_1M_2 = r_1 + r_2$
b) $S_{12}(7/0/-3)$

28a) $S_{12}(0/-1/-2)$
b) $S_{12}(-2/2/-4)$

29a) $(x-6)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 4$
b) $(x+4)^2 + (y-30)^2 + (z+5)^2 = 900$
c) $(x+2)^2 + (y+7)^2 + (z-11)^2 = 144$

30a) $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 256$
$(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 4$
b) $(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 144$
$(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 4$

31. $M(0/-3/0)$, $r = 12$

32. $M(6/7/8)$, $r = 12$

50

33. $\mathcal{K}_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 9$; $\mathcal{K}_2: (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$

34a) $\mathcal{K}_1: (x-11)^2 + (y-12)^2 + (z-9)^2 = 324$; $\mathcal{K}_2: (x+5)^2 + (y+16)^2 + (z+7)^2 = 324$
b) $\mathcal{K}_1: (x-26)^2 + (y+37)^2 + z^2 = 1764$; $\mathcal{K}_2: (x+6)^2 + (y-39)^2 + (z-16)^2 = 1764$

35a) $4y - 3z - 13 = 0$
b) $4y + 3z + 22 = 0$
c) $z = 2; \quad 4x - 7y - 4z + 17 = 0$
d) $y = -2; \quad 2x + 3y + 6z + 34 = 0$

36a) $3x + 2y - 6z - 72 = 0,$
$3x + 2y - 6z + 26 = 0$
b) $2x - 2y + z - 34 = 0,$
$2x - 2y + z + 20 = 0$

37a) $R(1/6/-5)$
b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
c) 43.60°

38. $R(8/0/3)$, $S(4/2/4)$

39a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$
b) $(x - ^7/_3)^2 + (y - ^7/_3)^2 + (z - ^7/_3)^2 = ^{49}/_9$

10. Vektorprodukt und Spatprodukt

51

1. $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ und $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

2. $\vec{c} = \begin{pmatrix} -25 \\ 1 \\ -20 \end{pmatrix}$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ und $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

3. folgt aus der Definition

4a) $\vec{0}$
b) $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear

5a) $\vec{0}$ b) $4(\vec{a} \times \vec{b})$ c) $\vec{0}$ d) $-7(\vec{a} \times \vec{b})$

6. $a = \sqrt{13}$, $b = \sqrt{14}$, $c = \sqrt{101}$; $\varphi \approx 48.15°$; $\sin\varphi = \frac{\sqrt{101}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{14}}$

52

7. $\vec{e}_z, -\vec{e}_y, \vec{e}_x, \vec{e}_y$

8a) $\vec{u} = \vec{v} = \vec{w} = \begin{pmatrix} -28 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}$ b) - c) u=v=w=44

9a) $3x - y + 2z - 4 = 0$
b) $8x - 3y + z = 0$
c) $2y - 3z + 6 = 0$
d) $4x + 3y + 2z + 1 = 0$

10a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -13 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix}$

11. z.Bsp. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ kollinear / C auf Gerade AB / $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

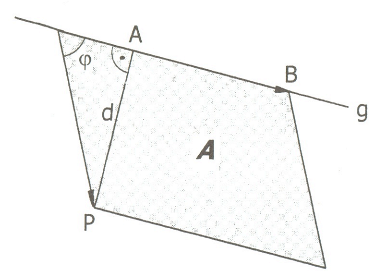
12a) 5 b) 46 c) 38.5 d) 12

13a) $x + y + 2z - 1 = 0$
b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

53

14. $\frac{ab \cdot \sin\varphi}{ab \cdot \cos\varphi} = \tan\varphi$

15. $A = \overline{AB} \cdot d$
$d = \overline{AP} \cdot \sin\varphi$
$A = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \cdot \sin\varphi$
$= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|$



16a) 3
b) 7
c) 11
d) 9

17. $A = 7.5$; $V = 50$

18a) $5\sqrt{2} \approx 7.07$ b) $P(4/2/0)$

53

19. $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$

$h = |c \cdot \cos\varphi|$

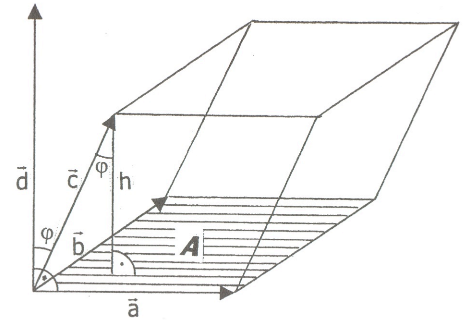
$d = |\vec{d}| = A$

$V = A \cdot h = d \cdot h$

$= |dc \cdot \cos\varphi|$

$= |\vec{d} \cdot \vec{c}|$

$= |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$



54

20a) 3
b) 78
c) 370
d) 53

21a) ja
b) ja
c) nein
d) ja

22a) $x = -18$
b) $y = 3$
c) $x = 2$
d) $z = 2$

23a) ja
b) nein
c) ja

24a) $x_1 = 6$, $x_2 = 8$
b) $y_1 = 5$, $y_2 = -8$
c) $z_1 = 1$, $z_2 = 1.8$

25. $V = {}^1/_6\,|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$

26a) $V = 30$
b) $V = 15$
c) $V = 171$

27. $V = 3$

55

28a) ${}^1/_{12}$
b) ${}^1/_{48}$

29a) S(1/1/1)
b) P(-1/3/0), Q(-2/1/-1), R(3/2/-2)
c) $V = 4.5$

30a) $x_1 = 0$, $x_2 = -22$
b) $y_1 = -1$, $y_2 = -7$

11. Maturaufgaben zur Vektorgeometrie

56

1a) M(4/5/1), $r = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
b) 30°
c) $s'\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$;
P(6/11/1)

2a) P(-2/2/2), d = 6
b) $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 9$
c) $2x + y + 2z - 11 = 0$,
$2x + y + 2z + 7 = 0$

3a) C(-4/-11/1); $\alpha = \beta \approx 48.19°$, $\gamma \approx 83.62°$; Flächeninhalt $A \approx 40.25$
b) C'(-8/-9/5); Volumen $V = 72$

4a) $(x - 7)^2 + (y - 8)^2 + (z - 7)^2 = 98$; Berührungspunkt P(0/8/0)
b) C(0/8/0) ≡ P, D(3/9/-2); ABCD: $x + y + 2z - 8 = 0$; Volumen $V = 98$
c) M'(3.5/4.5/0), $r = 3.5\sqrt{2} \approx 4.95$

57

5a) $(x+1)^2 + (y+8)^2 + (z - 4)^2 = 81$
b) $(x+1)^2 + (y+8)^2 + (z - 4)^2 = 9$
c) $(x - 1)^2 + (y+9)^2 + (z - 2)^2 = 36$; Berührungspunkt P(-3/-7/6)

57

6a) $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$ und $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
b) D(1/5/-4)
c) Höhe h = 36; S_1(21/-26/0), S_2(-11/38/8)

7a) $\mathcal{E}\colon x - y + 4z + 8 = 0$; $\mathcal{K}\colon (x - 7)^2 + (y - 3)^2 + (z - 6)^2 = 72$
b) C(1+2t/9-2t/-t); zeigen, dass $\overline{AC} = \overline{BC}$
c) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$; oder: Kugel um M(3/1/2) mit Radius r = 6 mit der Geraden g schneiden; C(5/5/-2)

8a) $\mathcal{F}\colon 2x - 2y - z + 6 = 0$; identische Normalenvektoren
b) d = 6
c) $g'\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$; S_1(6/7/4), S_2(-38/-21/-28)
d) $(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+5)^2 = 9$

58

9a) M_1(-3/7/0), $r_1 = 10$
b) Berührungspunkt T(3/-1/0)
c) $\mathcal{E}\colon 2x - 2y + z - 8 = 0$; $d = {}^{28}/_3$
d) $(x - 9)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$
e) $t\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; Tangentialebene in P: $4x - 3y - 17 = 0$

10a) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix}$
b) k = 5; B(8/-10/5), C(18/0/0), D(8/11/2)
c) V = 450

11a) $t_1\colon x = 0$; $t_2\colon 3x - 4y - 12 = 0$
b) $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 + (z - 12)^2 = 169$
c) $5x + 12z = 0$

12a) P(6/5/4)
b) M_k(4/7/3), $r_k = 3$
c) Berührungspunkt B(2/9/2); Tangentialebene $\mathcal{T}\colon 2x - 2y + z + 12 = 0$