Urs Wyder

Aufgabe 1 — 4 P.

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie die Punkte $P(3/-4/8)$ und $Q(9/4/8)$.

a) Die Gerade g wird senkrecht auf die x-y-Ebene projiziert. Geben Sie eine Parameterdarstellung der projizierten Gerade g' an.

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel der projizierten Geraden g' mit der y-Achse.

c) Überprüfen Sie mit Hilfe einer Rechnung, ob der Punkt P auf der Geraden g liegt.

d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes Q von der Geraden g.

Aufgabe 2 — 4 P.

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie ein Punkt P=(2/y/3).

e) Berechnen Sie die Gleichung einer Geraden, welche die beiden Geraden g und h horizontal verbindet und durch den Punkt P geht, sowie die y-Koordinate von Punkt P.

f) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Geraden g und einer Parallelen zu h, die g schneidet.

g) Berechnen Sie den Abstand der beiden Spurpunkte der Geraden g und h in der x-y-Ebene.

Aufgabe 3 — 4 P.

Gegeben sind die Punkte A=(0/0/14), B=(-4/2/8), C=(-16/24/6) und D=(0/16/30).

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Viereck ein Trapez ist.

b) Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt S der Mittellinie m mit der längeren der beiden Diagonalen?

c) Berechnen Sie den Winkel $\angle BCD$.

Aufgabe 4 **4 P.**

Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A=(1/2/2), B=(3/1/3) und C=(0/0/4).

Das Dreieck wird von einem Punkt Z=(0/0/7) aus beleuchtet.

Berechnen Sie

a) den Winkel α des Dreiecks ABC.

b) die Koordinaten A', B' und C' des Schattendreiecks in der xy-Ebene.

c) die Länge der Strecke $\overline{A'B'}$.

Aufgabe 5 **4 P.**

Gegeben ist eine Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$,

sowie die Punkte P=(3/-4/8) und Q=(-3/13/8).

a) Zeigen Sie durch Rechnung, welcher der beiden Punkte P und Q auf der Geraden g liegt.

b) Bestimmen Sie von demjenigen Punkt, welcher nicht auf der Geraden g liegt, den Abstand zur Geraden g.

Aufgabe 6 **4 P.**

Gegeben ist eine Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

sowie eine Gerade h, welche durch die Punkte A=(2/–1/–3) und B=(3/–1/z) verläuft.

a) Bestimmen Sie z so, dass sich die Geraden g und h schneiden.

b) Berechnen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts.

c) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden.

d) Bestimmen Sie die Geradengleichung von g', der senkrechten Projektion der Geraden g auf die xy-Ebene.

Aufgabe 1 **4 P.**

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie die Punkte $P(3/-4/8)$ und $Q(9/4/8)$.

h) Die Gerade g wird senkrecht auf die x-y-Ebene projiziert. Geben Sie eine Parameterdarstellung der projizierten Gerade g' an.

i) Berechnen Sie den Schnittwinkel der projizierten Geraden g' mit der y-Achse.

j) Überprüfen Sie mit Hilfe einer Rechnung, ob der Punkt P auf der Geraden g liegt.

k) Berechnen Sie den Abstand des Punktes Q von der Geraden g.

a) $g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

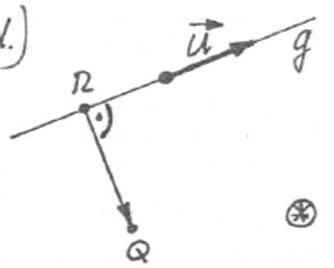
$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{u \cdot v} = \frac{4}{5 \cdot 1} = 0{,}8$ 2

$\alpha = 36{,}87^\circ$ resp. $\alpha' = 143{,}13^\circ$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow s = -1 \\ \rightarrow s = -29/4 \\ \rightarrow s = \text{——} \end{array} \Bigg\}$ 2

P liegt nicht auf der Geraden g.

d)



$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{RQ} = 0 \rightarrow ⊛$

$\vec{RQ} = \begin{pmatrix} 9-6-3s \\ 4-25-4s \\ 8-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3s \\ -21-4s \\ 0 \end{pmatrix}$

⊛ $3(3-3s) + 4(-21-4s) = 0$

$9 - 9s - 84 - 16s = 0$

$25s = -75 \Rightarrow s = -3$

$\vec{RQ} = \begin{pmatrix} 3+9 \\ -21+12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2

$\overline{RQ} = \sqrt{144 + 81} = 15$

Aufgabe 2 **4 P.**

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{r}=\begin{pmatrix}12\\-3\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\3\\-5\end{pmatrix}$ und h: $\vec{r}=\begin{pmatrix}-4\\5\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-7\\2\end{pmatrix}$ sowie ein Punkt P=(2/y/3).

a) Berechnen Sie die Gleichung einer Geraden, welche die beiden Geraden g und h horizontal verbindet und durch den Punkt P geht, sowie die y-Koordinate von Punkt P.

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Geraden g und einer Parallelen zu h, die g schneidet.

c) Berechnen Sie den Abstand der beiden Spurpunkte der Geraden g und h in der x-y-Ebene.

a)

Die Punkte auf den Geraden g und h, die Teil der Verbindungsgeraden sind, müssen auch die z-Koordinate 3 haben:

$$g: \begin{pmatrix}x\\y\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-3\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\3\\-5\end{pmatrix}\Rightarrow t=-1\Rightarrow x=5,\ y=-6$$

Schnittpunkt der Horizontalen mit der Geraden g : $\underline{S_g(5/-6/3)}$

$$h: \begin{pmatrix}x\\y\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\5\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-7\\2\end{pmatrix}\Rightarrow s=3\Rightarrow x=-1,\ y=-16$$

Schnittpunkt der Horizontalen mit der Geraden h : $\underline{S_h(-1/-16/3)}$

Richtungsvektor der Horizontalen : $\begin{pmatrix}-1\\-16\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-10\\0\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$

Horizontale : $\underline{\underline{\vec{r}=\begin{pmatrix}5\\-6\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}}}$

Koordinate von P: $\begin{pmatrix}2\\y\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-6\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}\rightarrow t=-1 \rightarrow y=-11$

$\underline{\underline{P=(2/-11/3)}}$

b)

$$\varphi=\arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}7\\3\\-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-7\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}7\\3\\-5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-7\\2\end{pmatrix}\right|}\right)=\underline{\underline{111{,}0074°}}$$ oder $\varphi=\underline{\underline{68{,}9926°}}$

c)

$$g: \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-3\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\3\\-5\end{pmatrix}\Rightarrow t=-\frac{2}{5}\Rightarrow x=9{,}2,\ y=-4{,}2$$

Spurpunkt : $\underline{S_g(9{,}2/-4{,}2/0)}$

$$h: \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\5\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-7\\2\end{pmatrix}\Rightarrow s=1{,}5\Rightarrow x=-2{,}5,\ y=-5{,}5$$

Spurpunkt : $\underline{S_h(-2{,}5/-5{,}5/0)}$

Abstand $=\sqrt{(9{,}2+2{,}5)^2+(-4{,}2+5{,}5)^2}=\underline{\underline{11{,}7720}}$

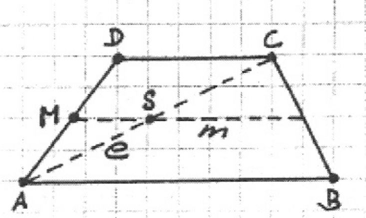
Aufgabe 3 **4 P.**

Gegeben sind die Punkte A=(0/0/14), B=(-4/2/8), C=(-16/24/6) und D=(0/16/30).

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Viereck ein Trapez ist.

b) Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt S der Mittellinie m mit der längeren der beiden Diagonalen?

c) Berechnen Sie den Winkel $\angle BCD$.



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 22 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} +16 \\ -8 \\ 24 \end{pmatrix}; \quad \vec{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ -16 \end{pmatrix}$$

a) $\vec{CD} = (-4)\cdot\vec{AB} \Rightarrow \vec{CD}$ zu $\vec{AB}$ kollinear!

$\vec{BC}$ u. $\vec{DA}$ nicht kollinear zu $\vec{CD}$ u. $\vec{AB}$!

↳ D.h. Viereck ABCD ist ein Trapez.

b) $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -16 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{896} = 29{,}933$

$\vec{BD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 22 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{696} = 26{,}382$

m: $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 22 \end{pmatrix} \Rightarrow M = (0/8/22)$

$\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 22 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -16 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix}$

S: $\vec{m} = \vec{e} \Rightarrow$
$$\begin{array}{l|rcl|l} ① & -4t &=& -16u & \rightarrow t = 4u \\ ② & 8+2t &=& 24u & \text{einsetzen} \\ ③ & 22-6t &=& 14-8u & \end{array}$$

②: $8 + 2\cdot 4u = 24u \Rightarrow u = 1/2; \quad t = 2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 22 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -16 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$S = (-8/12/10)$

c) $$\cos\varphi = \frac{\vec{CB}\cdot\vec{CD}}{\overline{CB}\cdot\overline{CD}} = \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ -22 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 24 \end{pmatrix}}{\sqrt{632}\cdot\sqrt{896}} = 0{,}5528$$

$\varphi = 56{,}44°$

Aufgabe 4 **4 P.**

Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A=(1/2/2), B=(3/1/3) und C=(0/0/4).

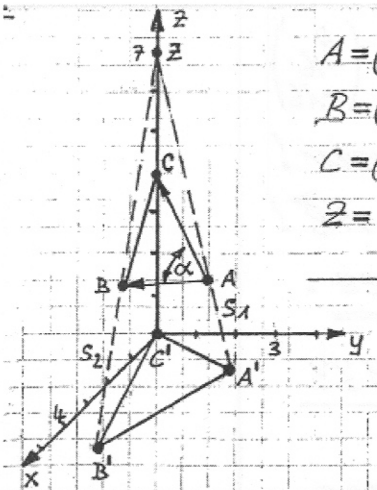
Das Dreieck wird von einem Punkt Z=(0/0/7) aus beleuchtet.

Berechnen Sie

a) den Winkel α des Dreiecks ABC.

b) die Koordinaten A', B' und C' des Schattendreiecks in der xy-Ebene.

c) die Länge der Strecke $\overline{A'B'}$.



$A=(1/2/2)$

$B=(3/1/3)$

$C=(0/0/4)$

$Z=(0/0/7)$

a.) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot(-1)+(-1)(-2)+1\cdot 2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}$$

$\underline{\underline{\alpha = 74{,}2068°}}$

b.) $\underline{\underline{C' = (0/0/0)}}$

$$S_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$A': \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{t = 7/5}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 + 7/5 = 7/5 \\ y = 0 + 2\cdot 7/5 = 14/5 \end{array}\right\} \underline{\underline{A' = (1{,}4/2{,}8/0)}}$$

$$S_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$B': \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{t = 7/4}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 + 3\cdot 7/4 = 21/4 \\ y = 0 + 7/4 = 7/4 \end{array}\right\} \underline{\underline{B' = (5{,}25/1{,}75/0)}}$$

c.) $\underline{\underline{\overline{A'B'}}} = \sqrt{(5{,}25-1{,}4)^2 + (1{,}75-2{,}8)^2} = \underline{\underline{3{,}99}}$

Aufgabe 5 **4 P.**

Gegeben ist eine Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$,

sowie die Punkte P=(3/-4/8) und Q=(-3/13/8).

a) Zeigen Sie durch Rechnung, welcher der beiden Punkte P und Q auf der Geraden g liegt.

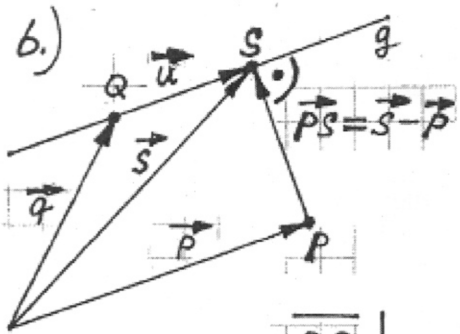
b) Bestimmen Sie von demjenigen Punkt, welcher nicht auf der Geraden g liegt, den Abstand zur Geraden g.

a.)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow t = -1 \\ \rightarrow t = -29/4 \\ \rightarrow \end{array} \Bigg\} \; \underline{P \notin g}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow t = -3 \\ \rightarrow t = -3 \\ \rightarrow \end{array} \Bigg\} \; \underline{Q \in g}$$

b.)



$$\vec{PS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{PS} = \begin{pmatrix} 3+3t \\ 29+4t \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$\vec{PS} \perp g \Rightarrow \underline{\vec{PS} \cdot \vec{u} = 0}$ (Skalarprodukt)

$$\begin{pmatrix} 3+3t \\ 29+4t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 + 9t + 116 + 16t = 0$$

$$125 + 25t = 0 \Rightarrow \underline{t = -5}$$

Mit $t = -5$ gilt:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix} + (-5) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{S = (-9/5/8)}$$

$$\underline{\vec{PS}} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\underline{\overline{PS}}} = \sqrt{144 + 81} = \underline{\underline{15}}$$

Aufgabe 6 4 P.

Gegeben ist eine Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

sowie eine Gerade h, welche durch die Punkte A=(2/–1/–3) und B=(3/–1/z) verläuft.

a) Bestimmen Sie z so, dass sich die Geraden g und h schneiden.

b) Berechnen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts.

c) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden.

d) Bestimmen Sie die Geradengleichung von g', der senkrechten Projektion der Geraden g auf die xy-Ebene.

---

a) h: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z+3 \end{pmatrix}$ 0.5 P

$g = h \rightarrow \left| \begin{array}{l} t+1 = u+2 \\ 2t+3 = -1 \\ -t = -3 + u(z+3) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{solve}} \left. \begin{array}{l} t = -2 \\ u = -3 \end{array} \right\}$ einsetzen in III 1 P

$\rightarrow 2 = -3z - 12 \rightarrow z = \dfrac{-14}{3}$ 0.5 P

b) $t = -2 \xrightarrow{\text{in g einsetzen}} \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow S = (-1/-1/2)$ 0.5 P

c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5/3 \end{pmatrix}$

$\cos\varphi = \dfrac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|} = 0.560 \rightarrow \varphi = 55.936°$ 1 P

d) g': $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0.5 P

umwandeln in Funktionsgleichung!

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow x - 1 = t \\ \rightarrow \frac{y-3}{2} = t \end{array} \Big\} \; x - 1 = \frac{y-3}{2}$

$2x - 2 = y - 3$

$y = 2x + 1$

Kontrolle!

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$