

# Auftrieb und Archimedisches Prinzip

## 1 Repetition

### 1.1 Druck

**Druck** ist Kraft pro Fläche:

$$p = \frac{F}{A}$$

Die **Einheit** des Drucks ist das Pascal:

$$\frac{1\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Pa}$$

Pascal ist eine sehr kleine Einheit. Deshalb wird im Alltag oft die Einheit bar verwendet. Ein bar Druck entsteht ungefähr, wenn die Gewichtskraft eines Kilogramms auf  $1 \text{ cm}^2$  wirkt.

$$1\text{bar} = 100'000 \text{ Pascal} = 100 \text{ kPa}$$

Die Atmosphäre (atm) ist der mittlere Druck der Erdatmosphäre auf Meereshöhe:

$$1 \text{ atm} = 101'325 \text{ Pa}$$

### 1.2 Kraft auf eine Fläche $A$

Wirkt auf eine Fläche  $A$  der Druck  $p$ , so gilt für die gesamte auf die Fläche wirkende Kraft:

$$p = \frac{F}{A} \implies F = p \cdot A$$

### 1.3 Hydrostatischer Druck

Bedingt durch das Eigengewicht nimmt der Druck in einer Flüssigkeit abhängig von der Tiefe  $h$  zu. Dieser Hydrostatische Druck  $p$  ist das Produkt aus der Dichte  $\rho$ , der Erdbeschleunigung (Ortsfaktor)  $g$  und der Tiefe  $h$ :

$$p = p_0 + \rho g h$$

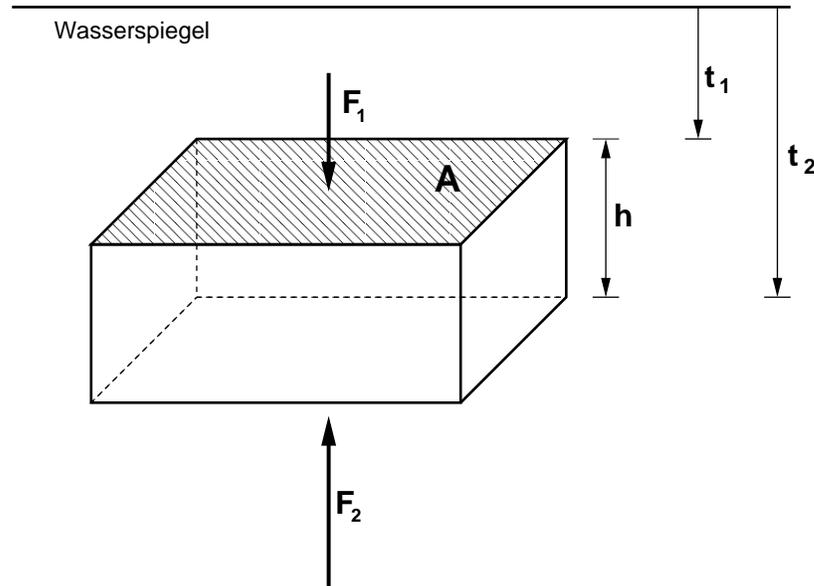
Der Gesamtdruck  $p$  in der Tiefe  $h$  besteht aus dem Luftdruck  $p_0$ , also dem Druck, der bereits auf die Wasseroberfläche wirkt, und dem hydrostatischen Druck  $\rho \cdot g \cdot h$ .

Taucher verwenden die Faustregel, dass der Druck pro 10 Meter Tiefe um 1 bar zunimmt.

## 2 Theorie

### 2.1 Herleitung

Ein Quader mit der Grundfläche  $A$  und der Höhe  $h$  befindet sich bezüglich seiner oberen Kante in der Tiefe  $t_1$  unter dem Wasserspiegel. Die Grundfläche des Quaders befindet sich in der Tiefe  $t_2$ .



Für den Druck in der Tiefe  $t_1$  resp.  $t_2$  gilt:

$$p(t_1) = \rho g t_1$$

$$p(t_2) = \rho g t_2$$

Diese Drücke führen an der oberen Fläche des Quaders zu einer abwärts gerichteten Kraft  $F_1$  und an der Grundfläche zu einer aufwärts gerichteten Kraft  $F_2$ :

$$F_1 = \rho g t_1 A$$

$$F_2 = \rho g t_2 A$$

Die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  haben entgegengesetzte Richtung. Deshalb ist die resultierende Kraft - die Auftriebskraft - die Differenz zwischen beiden:

$$F_{\text{Auftrieb}} = F_2 - F_1 = \rho g t_2 A - \rho g t_1 A = \rho g (t_2 - t_1) A$$

Da  $t_2 - t_1$  gleich der Höhe  $h$  des Quaders ist und  $A \cdot h$  dem Volumen des Quaders entspricht, gilt:

$$F_{\text{Auftrieb}} = \rho g (t_2 - t_1) A = \rho g A h = \rho g V$$

### 2.2 Hydrostatischer Auftrieb: Archimedisches Prinzip

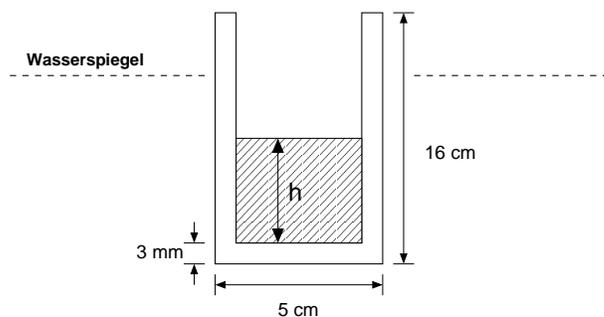
Ein Körper, der teilweise oder vollständig in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, erfährt eine Auftriebskraft, deren Betrag gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit ist:  $F_{\text{Auftrieb}} = \rho g V$

### 3 Aufgaben

Im Anhang finden Sie eine Tabelle mit den Dichten ( $\rho$ ) verschiedener Flüssigkeiten und Gase. Verwenden Sie für die Erdbeschleunigung (Ortsfaktor)  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

1. Ein Kieferholzquader mit einer Grundfläche von 1 Meter mal 1 Meter und einer Höhe von 30 cm hat eine Dichte von  $520 \text{ kg/m}^3$  schwimmt im See. Wie tief taucht es ein?
2. Ein Helium-Ballon wiegt inklusive Tragkorb und Gasflaschen 200 kg. Wie viele Kubikmeter muss das Volumen des Ballons mindestens betragen, damit 5 Personen à 70 kg transportiert werden können?
3. Erkläre detailliert, wie Archimedes testete, ob die Krone von König Hieron II. aus reinem Gold bestand oder nicht.
4. Wie viel Prozent eines Eisbergs befinden sich unter resp. über Wasser?
5. Eine Eisscholle ist 0.5 Meter dick. Wie gross muss die Fläche minimal sein, damit ein Eisbär der Masse  $m = 500 \text{ kg}$  trockenen Fusses darauf stehen kann?
6. Was geschieht mit dem Wasserspiegel, wenn ein aus Stahl gebautes Schiff sinkt? Steigt oder fällt er? Oder bleibt er gleich? Überlegen Sie und berechnen Sie folgendes Beispiel: In einer Schleuse, die 50 Meter breit und 300 Meter lang ist, sinkt ein Stahlschiff mit der Masse  $m = 10'000 \text{ Tonnen}$ .
7. Ein Glas, in welchem ein Eiswürfel schwimmt, ist randvoll mit Wasser gefüllt. Der oberste Punkt des Eiswürfels liegt dabei über dem Glasrand. Läuft das Glas über, wenn das Eis schmilzt?
8. Meine Personenwaage zeigt mir eine Masse von 70 kg an. Was wird dabei nicht berücksichtigt? Um wie viel müsste man den Wert korrigieren? Hinweis: die Dichte eines Menschen beträgt rund 1 kg pro Liter.
9. Quecksilber ist ein Schwermetall, das bei Raumtemperatur flüssig ist. Wie viel Prozent eines Menschen würden eintauchen, wenn er in Quecksilber (Hg) baden würde?  
Zusatz:  
Finden Sie eine allgemeine Formel für die Eintauchtiefe eines beliebigen Körpers in Prozent abhängig von den Dichten des Mediums und des eingetauchten Körpers.
10. Was ist ein Aräometer? Was wird damit gemessen und wie funktioniert es?
11. Weshalb können Fische schweben? Wie funktioniert ein U-Boot?
12. Die Gewichtskraft eines Metallblocks beträgt in Luft 3 N. Wird er in Wasser getaucht, beträgt sie noch 1.89 Newton. Um welches Metall handelt es sich?

13. Ein zylindrisches Trinkglas schwimmt im Wasser (Bild). Bis zu welcher Höhe  $h$  kann das Glas mit Wasser befüllt werden, damit es gerade noch schwimmt?



14. Eine Boje hat die Form eines umgekehrten Kegels und wiegt 4 kg. Die Grundfläche des Kegels beträgt  $0.2 \text{ m}^2$ , die Höhe 50 cm. An der Spitze der Kegel-Boje wird mittels Schnur ein Bleigewicht von 16 kg angehängt. Wie tief sinkt die Boje ein, wenn sie mit dem Gewicht in einen See geworfen wird?

## 4 Anhang

### 4.1 Dichte von Flüssigkeiten und Gasen

Medium	Dichte $\rho$
Helium (He)	$0.1785 \text{ kg/m}^3$
Luft	$1.204 \text{ kg/m}^3$ ( $20^\circ\text{C}$ )
Benzin	$750 \text{ kg/m}^3$
Alkohol (Ethanol)	$790 \text{ kg/m}^3$
Eis	$920 \text{ kg/m}^3$
Wasser	$1'000 \text{ kg/m}^3$ ( $999,975 \text{ kg/m}^3$ bei $3,98^\circ\text{C}$ )
Meereswasser	$1'025 \text{ kg/m}^3$
Beton	$2'400 \text{ kg/m}^3$
Glas	$2'500 \text{ kg/m}^3$
Aluminium (Al)	$2'700 \text{ kg/m}^3$
Granit	$2'800 \text{ kg/m}^3$
Stahl	$7'860 \text{ kg/m}^3$
Blei	$11'340 \text{ kg/m}^3$
Quecksilber (Hg)	$13'545.9 \text{ kg/m}^3$
Gold	$19'300 \text{ kg/m}^3$

### 4.2 Die Krone von König Hieron II. von Syrakus

König Hieron II. von Syrakus wollte wissen, ob seine Krone aus reinem Gold bestehe. Er beauftragte damit Archimedes (287 - 212 v. Chr.). Die Krone durfte er dabei weder zerstören noch beschädigen. Die Lösung des Problems - das archimedische Prinzip - kam ihm, als er beim Baden war. Der Überlieferung zufolge sprang er freudig auf, rannte nackt durch die Strasse und schrie: **Heureka** (griech.: ich habe es gefunden).